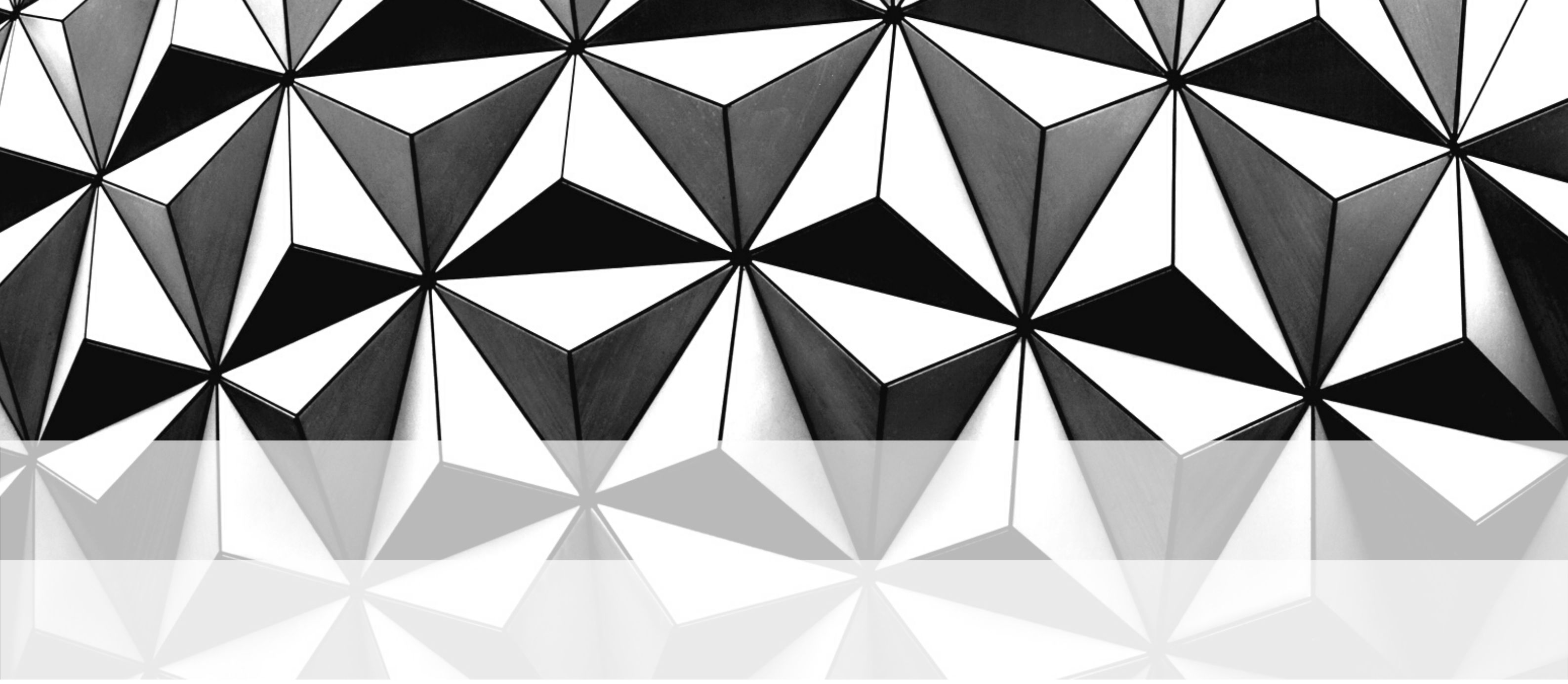
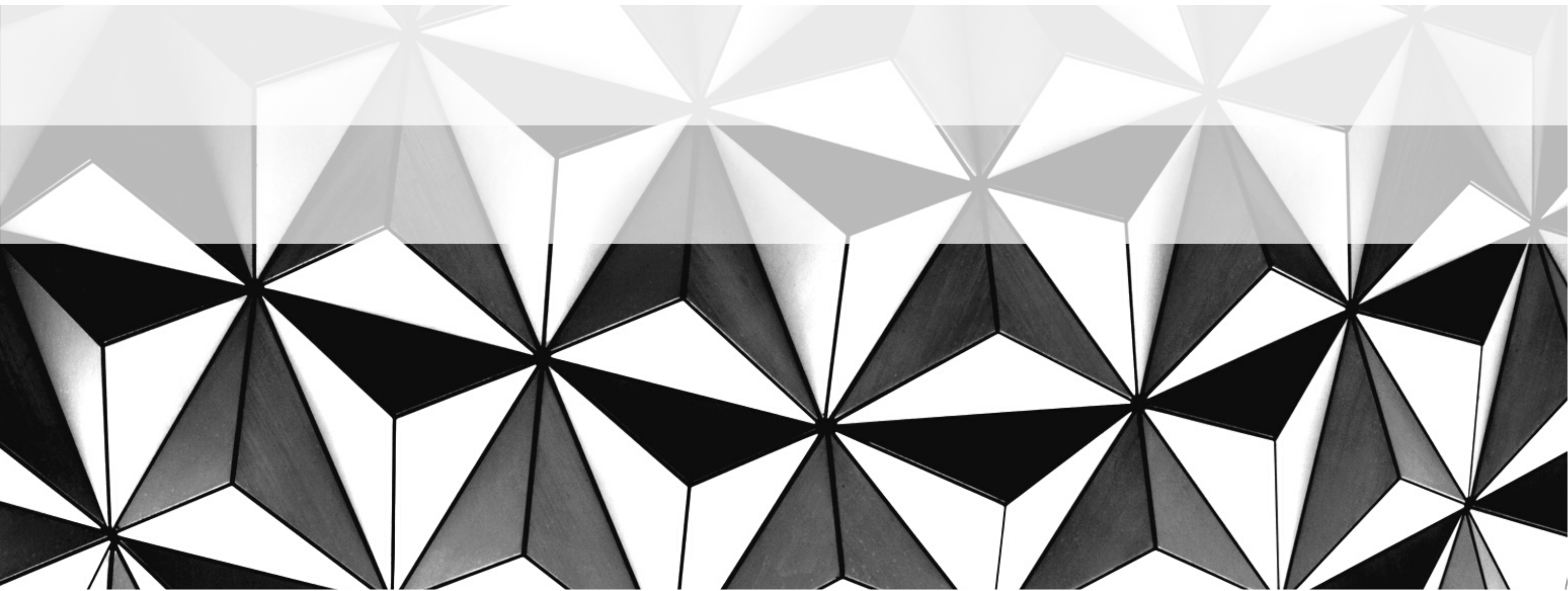


UVOD U POSLOVNU MATEMATIKU

Biserka Kolarec



.
UDŽBENICI SVEUČILIŠTA U ZAGREBU
.
MANUALIA UNIVERSITATIS STUDIORUM ZAGRABIENSIS

izdavač: Agronomski fakultet
ISBN: 987-953-6135-85-1

Recenzenti:

doc. dr. sc. Ljiljana Arambašić
dr. sc. Darko Biljaković
prof. dr. sc. Tomislav Došlić
prof. dr. sc. Kristina Šorić

Objavljivanje ovog udžbenika odobrio je Senat Sveučilišta u Zagrebu na prijedlog Povjerenstva za sveučilišno-nastavnu literaturu rješenjem
klasa 032-01/09-01/103
ur. broj 380-04/38-09-4
od 27. 11. 2009. godine.

Biserka Kolarec

UVOD U POSLOVNU MATEMATIKU

AGRONOMSKI FAKULTET SVEUČILIŠTA U ZAGREBU
ZAGREB, 2009.

Predgovor

Pred vama je nastavni materijal iz modula "Uvod u poslovnu matematiku". Njega na prvoj godini preddiplomskog studija slušaju studenti studija Agrarna ekonomika Agronomskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Ovdje izneseni materijal u cijelosti pokriva program modula "Uvod u poslovnu matematiku". Izbor je to iz matematičkih sadržaja financijske matematike, linearne algebre i matematičke analize s naglaskom na ekonomskoj primjeni teorije. Posebna je pažnja u izlaganju posvećena motivaciji i postupnosti u uvođenju novih znanja, na račun sistematskog iznošenja, ulaženja u dubinu i matematičke egzaktnosti gradiva. Taj je kompromis napravljen imajući na umu sastav čitatelja kojima matematika nije primarni interes. Nastavni sadržaj je podijeljen u sedam poglavlja:

- Financijska matematika
- Linearna algebra
- Elementarne funkcije
- Derivacija
- Primjena derivacije
- Funkcije više varijabli i parcijalne derivacije
- Uvod u integralni račun

Na kraju svakog od spomenutih poglavlja dani su zadatci za vježbu. Zadnje, 8. poglavlje skripte sadrži primjerke ispita znanja te pismenog ispita.
Nadam se da će ovaj nastavni materijal biti od pomoći studentima studija Agrarne ekonomike u svladavanju programom propisanog gradiva modula "Uvod u poslovnu matematiku".

U Zagrebu, lipanj 2009.

Biserka Kolarec

Sadržaj

1 Financijska matematika **10**

1.1 O skupovima brojeva 10

1.2 Aritmetički niz 13

1.3 Geometrijski niz 16

1.4 Složeni kamatni račun 18

1.4.1 Složeni kamatni račun s jednokratnom uplatom 19

1.4.2 Složeni kamatni račun s višekratnim uplatama ili isplatama . . 21

1.5 Račun zajma 26

1.5.1 Otplata zajma nominalno jednakim anuitetima 26

1.5.2 Otplata zajma nominalno jednakim otplatnim kvotama 28

1.6 Račun rente 30

1.7 Račun otpisa 30

1.7.1 Linearno otpisivanje 31

1.7.2 Aritmetičko-degresivno otpisivanje 32

1.7.3 Geometrijsko-degresivno otpisivanje 33

1.8 Zadatci 33

2 Linearna algebra **35**

2.1 Vektori u n-dimenzionalnom realnom prostoru 35

2.2 Matrice 37

2.2.1 Posebne matrice 37

2.2.2 Operacije s matricama 38

2.2.3 Rang matrice 42

2.2.4 Inverz matrice 45

2.2.5 Determinanta matrice 49

2.3 Matrice u rješavanju sustava linearnih jednadžbi 51

2.4 Linearna regresija 56

2.4.1 Regresijski pravac 56

2.5 Analiza ulaza i izlaza 61

2.6 Elementi linearnog programiranja 65

2.6.1 Grafičko rješavanje sustava linearnih nejednadžbi 66

2.6.2 Grafičko rješavanje problema linearnog programiranja 69

2.7 Zadatci 74

3 Elementarne funkcije **77**

3.1 Polinomi i racionalne funkcije 78

3.1.1 Linearna funkcija 78

3.1.2 Potencije 81

3.1.3 Polinomi 83

3.1.4 Racionalne funkcije 85

3.2 Eksponencijalne funkcije 87

3.3 Logaritamska funkcija 91

3.4 Operacije s funkcijama 94

3.4.1 Osnovna svojstva funkcija 94

3.4.2 Kompozicija funkcija 95

3.4.3 Inverzna funkcija 96

3.5 Zadatci 97

4 Derivacija **100**

4.1 Granična vrijednost (limes) funkcije 100

4.1.1 Veza računanja limesa funkcije i asimptote grafa funkcije . . . 101

4.2 Pojam i značenje derivacije 103

4.3 Derivacije elementarnih funkcija 106

4.4 Derivacije višeg reda 109

4.5 Granične veličine 109

4.6 Zadatci 110

5 Primjene derivacija 112

5.1 Primjene derivacija u analizi toka funkcije 112

5.1.1 Određivanje intervala rasta i pada funkcije 112

5.1.2 Geometrijsko značenje druge derivacije 114

5.1.3 Lokalni ekstrem funkcije i derivacije višeg reda 115

5.2 Primjena diferencijalnog računa na probleme optimizacije 116

5.3 Zadatci 119

6 Funkcije više varijabli 121

6.1 Parcijalne derivacije 125

6.1.1 Geometrijsko značenje parcijalne derivacije 126

6.1.2 Parcijalne derivacije drugog reda 127

6.2 Lokalni ekstremi funkcije dvije varijable 128

6.2.1 Problem uvjetnog ekstrema 131

6.3 Zadatci 132

7 Uvod u integralni račun 135

7.1 Pojam neodređenog integrala 135

7.2 Pojam određenog integrala 137

7.3 Primjena integralnog računa 141

7.3.1 Određivanje površine između dvije krivulje 141

7.3.2 Primjena integralnog računa u graničnoj analizi 143

7.4 Zadatci 143

8 Dodatak **145**

Poglavlje 1

Financijska matematika

1.1 O skupovima brojeva

Pojam skupa je osnovni pojam. On je intuitivno jasan i ne definira se strogo matematički. **Skup** je cjelina sastavljena od osnovnih dijelova koji se zovu **elementi skupa**. Skupove označavamo velikim tiskanim slovima, npr. $A, B, S, ...$ Ukoliko je moguće pobrojati elemente nekog skupa, njih zatvaramo u vitičaste zagrade: $\{\ \}$. Npr. želimo li zapisati skup S čiji su elementi svi samoglasnici (otvornici) hrvatskog jezika, pišemo

$$S = \{a, e, i, o, u\}.$$

Činjenicu da je a element skupa S bilježimo: $a \in S$. Činjenicu "p nije element skupa S" zapisujemo $p \notin S$. Elemente skupa je dovoljno u skupu spomenuti samo jednom. Primjerice, $R = \{m, a, t, e, m, a, t, i, k, a\} = \{m, a, t, e, i, k\}$.

Broj elemenata nekog skupa zove se **kardinalni broj** skupa. Ako u nekom skupu ima konačno mnogo elemenata, kažemo da je skup **konačan**. U suprotnom, skup je **beskonačan**.

Skupove možemo stavljati u određene odnose. Neka je $D = \{o, u\}$. Skup D je dio ili **podskup** skupa S, on je sadržan u skupu S. Pišemo $D \subseteq S$ i čitamo: "skup D je podskup skupa S". Štoviše, $D \neq S$ pa je skup D pravi podskup skupa S; pišemo $D \subset S$.

Potrebno je dati oznaku skupu koji nema niti jednog elementa; takav skup zovemo **prazan skup**. Oznaka za prazan skup je $\emptyset$. Vidjet ćemo da rezultat skupovnih operacija može biti upravo prazan skup. Nasuprot praznom skupu definira se univerzalni skup. To je skup u kome su svi ostali skupovi smješteni kao podskupovi. Univerzalni skup označavat ćemo slovom $\mathcal{U}$.

Radit ćemo sa sljedeće tri operacije među skupovima: presjekom, unijom i razlikom (diferencijom), redom u oznakama: $\cap$, $\cup$, $\setminus$.

Definicija 1 *Zadana su dva skupa A i B. Definiramo:*

1. **presjek** *skupova A i B:* $A \cap B = \{x \in \mathcal{U} : x \in A \text{ i } x \in B\}$,
2. **uniju** *skupova A i B:* $A \cup B = \{x \in \mathcal{U} : x \in A \text{ ili } x \in B\}$,
3. **razliku** *skupa A i B:* $A \setminus B = \{x \in \mathcal{U} : x \in A \text{ i } x \notin B\}$.

Zapise iz definicija čitamo na sljedeći način:

1. "A presjek B je skup svih elemenata x univerzalnog skupa $\mathcal{U}$ takvih da je x element skupa A i da je x element skupa B",
2. "A unija B je skup svih elemenata x univerzalnog skupa $\mathcal{U}$ takvih da je x element skupa A ili je x element skupa B",
3. "A minus B je skup svih elemenata x univerzalnog skupa $\mathcal{U}$ takvih da je x element skupa A i x nije element skupa B".

Vrijedi $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$, ali općenito $A \setminus B \neq B \setminus A$.

Primjer 1 *Neka su skupovi S, D, R zadani kao gore. Tada je:* $R \cap S = \{a, e, i\} = S \cap R$, $R \cup D = \{m, a, t, e, i, k, o, u\} = D \cup R$, $R \cap D = \emptyset$, $R \setminus S = \{m, t, k\}$, $S \setminus R = \{o, u\}$.

Prvenstveno nas zanimaju skupovi brojeva. Redom kojim se uvode, to su skupovi: prirodnih, cijelih, racionalnih, realnih i kompleksnih brojeva. Svaki sljedeći skup brojeva sadrži prethodni skup kao podskup, to jest proširenje je prethodnog skupa brojeva. Skupovi brojeva proširuju se zato da budu "zatvoreni" s obzirom na računske operacije.

Definicija 2 *Kažemo da je skup A* **zatvoren** *s obzirom na računsku operaciju $*$ ako za svaka dva elementa $a_1, a_2 \in A$ vrijedi $a_1 * a_2 \in A$.*

1. Brojeve koji su rezultat prebrajanja zovemo prirodni brojevi. To su $1, 2, 3, \ldots$ Broj 0 nije prirodan broj. **Skup prirodnih brojeva** označavamo s $\mathbf{N}$. Dakle

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Sve prirodne brojeve ne možemo pobrojati. Ipak, jasno je kako se nastavlja slijed elemenata. Lako je primijetiti da je skup prirodnih brojeva zatvoren obzirom na računske operacije zbrajanja i množenja. Međutim skup prirodnih brojeva nije zatvoren s obzirom na računsku operaciju oduzimanja: npr. svakako je $6 - 3 = 3 \in \mathbf{N}$, ali rezultat računa $3 - 6$ nije prirodan broj. Stoga se skup prirodnih brojeva proširuje do skupa cijelih brojeva.

2. **Skup cijelih brojeva** označava se sa $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

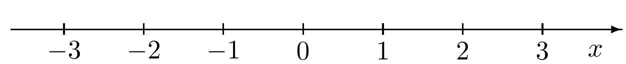
Vidimo da je $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$. Skup cijelih brojeva zatvoren je obzirom na računske operacije zbrajanja, množenja i oduzimanja. Međutim, skup cijelih brojeva nije zatvoren obzirom na računsku operaciju dijeljenja. Primjerice, $6 : 5$ nije cijeli broj.

3. Skup cijelih brojeva proširuje se dalje do **skupa racionalnih brojeva**. Njega označavamo sa slovom $\mathbf{Q}$. Skup $\mathbf{Q}$ zadajemo pravilom:

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N} \right\}.$$

Racionalni brojevi su razlomci kojima je u brojniku cijeli broj, a u nazivniku prirodni broj. Vrijedi $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q}$. Skup racionalnih brojeva zatvoren je obzirom na računske operacije zbrajanja, množenja, oduzimanja i dijeljenja. Skup $\mathbf{Q}$ nije zatvoren obzirom na računsku operaciju vađenja drugog korijena iz pozitivnog broja. Primjerice, $\sqrt{2}$ ne može se zapisati u obliku razlomka iz definicije. Stoga $\sqrt{2}$ nije racionalan broj. Brojeve koji nisu racionalni zovemo **iracionalnima**.

4. Dovoljno velik skup brojeva u kojem ćemo raditi je **skup realnih brojeva**. Označava se s $\mathbf{R}$. Skup realnih brojeva uključuje sve racionalne brojeve i sve iracionalne brojeve. Realni brojevi potpuno prekrivaju brojevni pravac (na slici). To znači da svaka točka na brojevnom pravcu ima kao koordinatu pridružen jedinstveni realan broj. Vrijedi i obratno, svakom realnom broju može se na jedinstven način pridružiti točka brojevnog pravca čija je on koordinata.



Skup realnih brojeva zatvoren je s obzirom na sve četiri osnovne računske operacije. Međutim, skup $\mathbf{R}$ nije zatvoren s obzirom na operaciju vađenja drugog korijena iz negativnog broja.

5. Skup realnih brojeva se dalje proširuje do skupa kompleksnih brojeva $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbf{R}\},$$

pri čemu je $i = \sqrt{-1}$ tzv. imaginarna jedinica. Očito je

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}.$$

Neprazan podskup S skupa realnih brojeva je **ograničen odozgo** ako postoji realan broj M takav da je $x \leq M$ za sve $x \in S$. Ako je ujedno $M \in S$, M je **maksimum** skupa S. Neprazan podskup S skupa realnih brojeva je **ograničen odozdo** ako postoji realan broj m takav da je $x \geq m$ za sve $x \in S$. Ako je ujedno $m \in S$, m je **minimum** skupa S. Neprazan podskup S skupa realnih brojeva je **ograničen** ako je ograničen odozdo i odozgo. Ako je neprazan skup $S \subseteq \mathbf{R}$ ograničen odozgo, svaki realan broj M za koji je $x \leq M$ za sve $x \in S$ zovemo **gornja granica** skupa S. Slično, ako je neprazan skup $S \subseteq \mathbf{R}$ ograničen odozdo, svaki realan broj m za koji je $x \geq m$ za sve $x \in S$ zovemo **donja granica** skupa S. Svaki neprazan ograničeni podskup skupa realnih brojeva ima najveću donju granicu i najmanju gornju granicu. Najveću donju granicu skupa $S \subseteq \mathbf{R}$ zovemo **infimum** skupa S, pišemo $\inf S$, a najmanju gornju granicu skupa S zovemo **supremum** skupa S, u oznaci $\sup S$.

1.2 Aritmetički niz

Definicija 3 *Neka su zadana dva neprazna skupa $\mathcal{D}$ i $\mathcal{K}$. Ako je dano pravilo f po kome se svakom elementu x skupa $\mathcal{D}$ pridružuje* točno jedan *element y skupa $\mathcal{K}$ kažemo da je zadana* **funkcija** *f. Pišemo $y = f(x)$ i x zovemo* **nezavisna varijabla**, *a y* **zavisna varijabla**. *Na razini skupova zapisujemo $f : \mathcal{D} \to \mathcal{K}$. Skup $\mathcal{D}$ zove se* **domena**, *a skup $\mathcal{K}$* **kodomena** *funkcije f.*

Nizom zovemo funkciju čija je domena jednaka skupu prirodnih brojeva $\mathbf{N}$.

Definicija 4 **Niz** *u skupu A je funkcija $f : \mathbf{N} \to A$.* **Konačan niz** *u A je funkcija $f : \{1, 2, 3, \ldots, n) \to A$, gdje je n neki prirodni broj.*

Nadalje ćemo raditi s nizovima brojeva. Dakle, na mjestu skupa A iz definicije stajat će neki od spomenutih skupova brojeva.

Kako je niz funkcija zadana na skupu prirodnih brojeva, to možemo računati $f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$ Sve navedene vrijednosti su elementi skupa A. Možemo zapisati:

$$a_1 = f(1), a_2 = f(2), \ldots, a_n = f(n), \ldots$$

Kažemo da je zadan niz $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$. a_n zovemo **opći član niza**. Ukoliko je to moguće, opći član niza zadaje se formulom.

Primjer 2 *Odredimo prvih pet članova niza zadanog općim članom* a_n*:*
a) $a_n = 2^n + 1$.
Za $n = 1, 2, 3, 4, 5$ *računamo*

$$a_1 = 2^1 + 1 = 3, a_2 = 2^2 + 1 = 5, a_3 = 2^3 + 1 = 9, a_4 = 2^4 + 1 = 17, a_5 = 2^5 + 1 = 33.$$

b) $a_n = 2n - 3$.
Uvrštavamo li redom prirodne brojeve od 1 *do* 5 *na mjesto* n*, dobivamo:*

$$a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = 3, a_4 = 5, a_5 = 7.$$

Pogledajmo dobiveni niz brojeva: $-1, 1, 3, 5, 7$*. Znamo li ga nastaviti? Razlika između susjednih članova niza je stalna i iznosi* 2*. Ovaj niz je primjer aritmetičkog niza.*

Definicija 5 **Aritmetički niz** *je takav niz brojeva u kome je razlika između svakog (osim prvog) člana niza i njegovog neposrednog prethodnika stalna (konstantna). Tu konstantnu razliku označavamo s* d *i zovemo* **razlikom** *(diferencijom) aritmetičkog niza. Ako je* $d > 0$*, niz zovemo* **rastućim***, ako je* $d < 0$ **padajućim***, a ako je* $d = 0$*, niz zovemo* **stacionarnim**.

....

Otkud naziv "aritmetički"? Svaki broj u aritmetičkom nizu koji ima neposrednog prethodnika i neposrednog sljedbenika jednak je aritmetičkoj sredini tih dvaju brojeva. Npr. u aritmetičkom nizu $-1, 1, 3, 5, 7, \ldots$ iz prethodnog primjera je

$$1 = \frac{-1+3}{2}, 3 = \frac{1+5}{2}, 5 = \frac{3+7}{2}, \ldots.$$

....

Primjer 3 *Odredimo koji je od sljedećih nizova aritmetički. Računamo razlike člana niza, osim prvog, i njegova neposrednog prethodnika (one moraju biti iste, jednake* d*):*

a) $-1, -3, -5, -7, -9, \ldots$	*(*$d = -2$*, padajući aritmetički niz)*
b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$	*(*$\frac{1}{2} - 1 \neq \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$*, nije aritmetički niz)*
c) $3, 3, 3, 3, \ldots$	*(*$d = 0$*, stacionarni aritmetički niz)*
d) $13, 10, 7, 4, \ldots$	*(*$d = -3$*, padajući aritmetički niz)*
e) $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$	*(*$d = 1$*, rastući aritmetički niz)*
f) $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$	*(*$4 - 1 \neq 9 - 5$*, nije aritmetički niz)*

Aritmetički niz je zadan čim mu znamo prvi član a_1 i razliku d. Tada je:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d = a_1 + 2d \\ a_4 &= a_3 + d = a_1 + 3d \\ &\vdots \end{aligned}$$

Opći član aritmetičkog niza možemo izraziti preko prvog člana a_1 i razlike d niza kao $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$.

Primjer 4 *Odredimo izraz za opći član aritmetičkog niza kome je $a_1 = -3, d = 10$.*

Uvrstimo podatke u izraz $a_n = a_1 + (n-1)d$. Dobivamo $a_n = -3 + 10(n-1) = -3 + 10n - 10$, odnosno

$$a_n = 10n - 13.$$

Primjer 5 *Kako glasi opći član aritmetičkog niza u kome je $a_3 = 1$ i $d = 1$?*

Znamo da je $a_3 = a_1 + 2d$ pa je $a_1 = a_3 - 2d = 1 - 2 \cdot 1 = -1$. Budući sad znamo a_1 i d, nastavimo kao u prethodnom primjeru. Dobivamo

$$a_n = n - 2.$$

Označimo sa S_n zbroj prvih n članova aritmetičkog niza:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Odredit ćemo iznos tog zbroja. Zapišimo S_n dva puta:

$$\begin{array}{lccccccc} S_n = & a_1 & + & (a_1+d) & + & \cdots & + & (a_1+(n-1)d) \\ S_n = & (a_1+(n-1)d) & + & (a_1+(n-2)d) & + & \cdots & + & a_1. \end{array}$$

Sad zbrojimo dvije jednakosti. Slijeva dobivamo zbroj $2S_n$. S desne strane, zbrajajući kako je naznačeno grupiranjem, dakle a_1 s $a_1 + (n-1)d$, $a_1 + d$ s $a_1 + (n-2)d$, ..., dobivamo n puta isti zbroj $2a_1 + (n-1)d$. Znači da je

$$2S_n = n \cdot (2a_1 + (n-1)d).$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza zadanog prvim članom a_1 i razlikom d računamo po formuli $\boxed{S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d).}$

Primijetimo da možemo pisati i

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + (a_1 + (n-1)d)) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Primjer 6 *Odredimo zbrojeve:*
a) prvih 60 prirodnih brojeva;
b) prvih deset parnih brojeva.

a) Kako je $n = 60, a_1 = 1, a_{60} = 60,$

$$S_{60} = \frac{60}{2}(1 + 60) = 30 \cdot 61 = 1830.$$

b) Prvi parni broj je broj 2. Razlika u aritmetičkom nizu kojeg čine parni brojevi je također jednaka 2. Stoga imamo

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2 \cdot 2 + (10 - 1) \cdot 2) = 110.$$

1.3 Geometrijski niz

Niz $2, 4, 8, 16, \ldots$ nije aritmetički niz. Svaki sljedeći član niza se od prethodnog dobiva množenjem s brojem 2. Ovaj niz je primjer geometrijskog niza.

Definicija 6 *Niz brojeva u kome je kvocijent člana niza (osim prvog) i njegovog neposrednog prethodnika stalan (konstantan) zove se* **geometrijski niz**. *Stalan kvocijent (količnik) q zovemo* **kvocijent** *(količnik) geometrijskog niza.*

Prema tome, u geometrijskom nizu vrijedi

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \cdots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \cdots = q.$$

Geometrijski niz potpuno je zadan s a_1 i q. Naime,

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 q, \\ a_3 &= a_2 q = a_1 q^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Opći član a_n geometrijskog niza možemo izraziti preko prvog člana a_1 i kvocijenta niza q kao $\boxed{a_n = a_1 q^{n-1}}$.

Primjer 7 *Odredimo kvocijent i sljedeća tri člana geometrijskog niza $2, -6, 18, \ldots$.*

Vidimo da je kvocijent niza

$$\frac{-6}{2} = \frac{18}{-6}$$

jednak -3. Svaki sljedeći član geometrijskog niza se od prethodnog dobiva množenjem s -3. Onda je: $a_4 = -54, a_5 = 162, a_6 = -486$.

. . . .

Otkud naziv "geometrijski"? Svaki broj u geometrijskom nizu (pozitivnih brojeva) koji ima neposrednog prethodnika i neposrednog sljedbenika jednak je geometrijskoj sredini tih dvaju brojeva. Npr. uzmemo li geometrijski niz $2, 6, 18, 54, \ldots$, tada je

$$6 = \sqrt{2 \cdot 18}, 18 = \sqrt{6 \cdot 54}, \ldots.$$

. . . .

Odredimo zbroj s_n prvih n članova geometrijskog niza. Opet jednakost

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

zapisujemo dva puta (drugi puta pomnoženu s q):

$$\begin{array}{ccccccccc} s_n & = & a_1 & + & a_1 q & + & \cdots & + & a_1 q^{n-1} \\ q s_n & = & a_1 q & + & a_1 q^2 & + & \cdots & + & a_1 q^n \end{array}$$

Oduzmemo li od druge jednakosti prvu, nakon skraćivanja jednakih pribrojnika dobivamo:

$$q s_n - s_n = a_1 q^n - a_1.$$

Sad izlučimo zajedničke faktore:

$$s_n(q-1) = a_1(q^n - 1).$$

Da dobijemo izraz za s_n, preostaje podijeliti zadnju jednakost s $q-1$. Pritom moramo pretpostaviti da je $q \neq 1$. Za $q = 1$ geometrijski niz je stacionaran to jest $a_n = a_1$ za svaki prirodni broj n. Stoga je u tom slučaju $s_n = n a_1$.

Zbroj prvih n članova geometrijskog niza zadanog prvim članom a_1 i kvocijentom $q \neq 1$ računamo po formuli $\boxed{s_n = a_1 \frac{q^n-1}{q-1}.}$

Primjer 8 *Odredimo zbroj prvih 8 članova niza zadanog općim članom $a_n = 2^n$.*

Budući je za sve $n \in \mathbf{N}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = \frac{2 \cdot 2^n}{2^n} = 2,$$

zadani niz je geometrijski. Kako je $a_1 = 2, q = 2$, imamo da je

$$s_8 = 2 \cdot \frac{2^8 - 1}{2 - 1} = 2 \cdot 255 = 510.$$

1.4 Složeni kamatni račun

U ovom odjeljku promatramo razne modele novčane štednje. Ona se odvija najčešće unutar novčarskih ustanova (banke, zadruge, pošte). Ustanova štednju stimulira davanjem kamate.

Iznos kamate određuje **kamatna stopa (kamatnjak)**. Kamatna stopa zadaje postotak koji novčarska ustanova daje na novac primljen na štednju. Ako ne naznačimo drugačije, uzimat ćemo da je kamatna stopa p godišnja i fiksna u cijelom razdoblju štednje.

Iznos novca stavljen na štednju zovemo **glavnica** i označavamo ga slovom C.

Razdoblje štednje ili ukamaćivanja označavamo slovom n. Uzimat ćemo da je razdoblje štednje zadano u godinama.

Iznos kamate označavamo slovom I. Ako je na štednju stavljena glavnica C na razdoblje od godinu dana uz kamatnjak p, iznos kamate je

$$I = \frac{Cp}{100}.$$

Uzimat ćemo da je obračun kamata **dekurzivan**. Kod dekurzivnog obračuna kamata se kamata računa na kraju godine na iznos s početka godine. Ako je za štednju ugovorena kamatna stopa p, broj

$$q = 1 + \frac{p}{100}$$

zovemo **dekurzivni kamatni faktor**.

Primjer 9 *Razmotrimo primjer tzv.* **jednostavnog kamatnog računa**. *Jednostavni kamatni račun opisuje slučaj štednje kod koje se kamate obračunavaju uvijek na istu glavnicu C u svakoj godini ukamaćivanja. Ako je p fiksna godišnja kamatna stopa, ulog C nakon godinu dana štednje donosi kamatu*

$$I = \frac{C \cdot p}{100}.$$

Iznos kamate je isti u svakoj godini štednje. Dakle, nakon n godina štednje štediša raspolaže s kamatom u iznosu od

$$I = n\frac{Cp}{100}.$$

Na kraju n-te godine ukamaćivanja početni iznos C naraste za iznos kamata i iznosi

$$C_n = C + I = C + \frac{Cpn}{100} = C\left(1 + \frac{pn}{100}\right).$$

1.4.1 Složeni kamatni račun s jednokratnom uplatom

Način štednje opisan gornjim primjerom nije i najpovoljniji mogući. Kod kamatnog računa kojeg zovemo složenim i s jednokratnom uplatom radi se o sljedećem: glavnica se ulaže na određeno razdoblje i nakon svake godine povećana za iznos kamate postaje svota koja se ukamaćuje u narednoj godini. Ukamaćivanje je složenije - računaju se "kamate na kamatu". Opišimo slučaj precizno.

Neka uložimo glavnicu C na štednju kroz razdoblje od n godina uz fiksnu kamatnu stopu p. Iznos kamate u prvoj godini štednje je

$$I = \frac{Cp}{100}.$$

Na kraju prve godine štednje, štediša raspolaže iznosom C_1 koji je jednak glavnici uvećanoj za iznos kamate:

$$C_1 = C + \frac{Cp}{100} = C\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Dalje se iznos C_1 ulaže na sljedeću godinu dana uz istu kamatnu stopu p. Na iznos C_1 se na kraju ove nove (druge) obračunske godine obračunava kamata. Kamata na kraju druge godine iznosi $(C_1p)/100$ tako da je iznos na računu na kraju druge godine jednak

$$C_2 = C_1 + \frac{C_1p}{100} = C_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = C\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

Tako nastavljamo dalje. Nakon n godina iznos jednokratne uplate glavnice C naraste na iznos

$$C_n = C\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Uvođenjem dekurzivnog kamatnog faktora q, ukupnu svotu na kraju n godina štednje možemo zapisati kraće kao

$$C_n = Cq^n.$$

Kod složenog kamatnog računa s jednokratnom uplatom glavnice C na n godina uz kamatnu stopu p, iznos na računu je $\boxed{C_n = C\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = Cq^n.}$

....

Primijetimo da svote

$$C, C_1 = C\left(1 + \frac{p}{100}\right), C_2 = C\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2, \ldots, C_n = C\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

čine (konačni) geometrijski niz. Uočimo da je ovdje C_n $(n+1)$. član geometrijskog niza kome je $C_1 = C$.

....

Napomenimo da je obračunavanje kamate u našim modelima pojednostavljeno. Mi pretpostavljamo da se pripis kamate obavlja jednom godišnje. Jasno je da to ne mora biti tako. Ako se kamata obračunava npr. dva puta godišnje, kamatnu stopu treba prilagoditi novom obračunu. Kako? Neka je **nominalna** (ugovorena) godišnja kamatna stopa p. **Relativnu** kamatnu stopu za polugodišnji obračun dobivamo dijeljenjem nominalne kamatne stope (p) s brojem obračuna (2) tijekom godine. Dakle, relativna kamatna stopa za polugodišnji obračun iznosi $\frac{p}{2}$. Iznos na računu nakon godinu dana štednje (nakon dva obračuna!) je

$$C_{1\cdot 2} = C\left(1+\frac{\frac{p}{2}}{100}\right)^{1\cdot 2}.$$

Ukoliko bi se obračuni vršili na kraju svakog mjeseca, iznos nakon godine dana (12 razdoblja ukamaćivanja) bio bi

$$C_{12} = C\left(1+\frac{p}{12\cdot 100}\right)^{12}.$$

Naravno da niti kamatna stopa ne mora biti fiksna u cijelom razdoblju štednje kako mi to ovdje uzimamo. Ako je tako, tada se razdoblje podijeli na više podrazdoblja u kojima kamatna stopa ima fiksnu vrijednost. Pri obračunu iznosa na računu, konačni iznos na kraju prvog podrazdoblja uzima se kao glavnica za drugo podrazdoblje, ...

Primjer 10 *Osoba je 1.1.2008. godine u banku uložila* 1000 *kn. Kolikim će iznosom ta osoba raspolagati 31.12.2010. godine ako je godišnja kamatna stopa* 10*, a obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan? Koliki bi bio konačni iznos na računu ukoliko bi obračun kamata bio mjesečni?*
Imamo slučaj složenog kamatnog računa s jednokratnom uplatom. Podatci su očito zadani, osim broja razdoblja ukamaćivanja. Njega izračunamo iz podataka o početku i kraju štednje. Dobivamo,

$$\begin{aligned} C &= 1000 \\ p &= 10 \\ n &= 3. \end{aligned}$$

Ako je obračun kamata godišnji, imamo

$$C_3 = C\left(1+\frac{p}{100}\right)^3 = 1000\left(1+\frac{10}{100}\right)^3 = 1331.$$

Znači štediša će po isteku vremena oročenja raspolagati s 1331 *kn.*
Ako je obračun kamata mjesečni, relativna kamatna stopa je $\frac{p}{12}$*, a broj obračuna jednak je 36, pa je konačni iznos*

$$C_{36} = C\left(1+\frac{p}{12\cdot 100}\right)^{36} = 1000\left(1+\frac{10}{1200}\right)^{36} = 1348.18.$$

1.4.2 Složeni kamatni račun s višekratnim uplatama ili isplatama

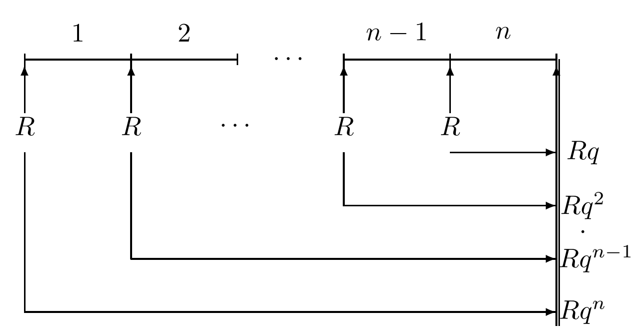
Za razliku od složenog kamatnog računa s jednokratnom uplatom kod kojeg se iznos novca uplaćuje jednom, na početku štednje, štednja se može odvijati tako da se na štednju u jednakim vremenskim razdobljima ulažu jednake svote. Npr. štediša odluči da će od mjesečnog prihoda (plaće) na štednju stavljati jednake svote R. Uzimat ćemo da je razmak između uplata jednak duljini jednog razdoblja za obračun kamate i da se uplate obavljaju bilo na početku, bilo na kraju razdoblja. Govorimo o

1. **prenumerando** uplati ako se fiksan iznos R uplaćuje na početku pojedinog razdoblja ukamaćivanja,
2. **postnumerando** uplati ako se uplate vrše na kraju pojedinog razdoblja ukamaćivanja.

Za prenumerando i za postnumerando račun nadalje određujemo izraze za iznose konačne vrijednosti višekratnih uplata i početne vrijednosti višekratnih isplata.

Konačna vrijednost prenumerando uplata

Uzmimo da osoba kroz n godina na početku godine uplaćuje jednake iznose R. Neka je štednja ugovorena uz godišnju kamatnu stopu p, fiksnu u cijelom razdoblju štednje. Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan. Koliki je iznos na računu nakon isteka n-te godine? Označimo s q dekurzivni kamatni faktor $q = 1 + \frac{p}{100}$.



Slika ilustrira doprinos svake pojedine uplate konačnoj vrijednosti računa. Iznos R uplaćen na početku prve godine može se, sam za sebe, tretirati kao jednokratna uplata na vrijeme od n godina. Onda on konačnom zbroju doprinosi s Rq^n. Dalje, iznos R uplaćen na početku druge godine možemo smatrati jednokratnom uplatom na vrijeme od $(n-1)$ godine; on konačnoj vrijednosti doprinosi s Rq^{n-1}, ... , iznos R uplaćen na početku posljednje godine štednje konačnoj vrijednosti doprinosi s Rq. Konačna vrijednost, označimo je C_n, je zbroj svih navedenih iznosa (na slici desno):

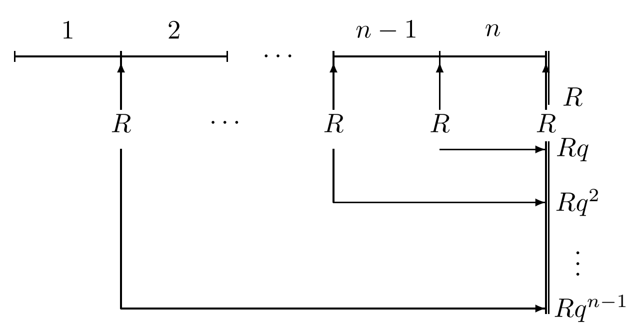
$$C_n = Rq + Rq^2 + \cdots + Rq^n.$$

Primijetimo da pribrojnici čine geometrijski niz: prvi član mu je Rq, a kvocijent q. Izraz za konačnu vrijednost dobivamo po formuli za zbroj prvih n članova geometrijskog niza.

Izraz za konačnu vrijednost prenumerando uplata iznosa R kroz n godina uz dekurzivni kamatni faktor q je $\boxed{C_n = Rq\frac{q^n-1}{q-1}.}$

Konačna vrijednost postnumerando uplata

Uzmimo isti slučaj višekratnih uplata, no neka se fiksan iznos R uplaćuje na kraju godine. Ilustrirajmo slikom doprinos svake pojedine uplate konačnoj vrijednosti na računu:



Iznos R uplaćen na kraju prve godine možemo shvatiti kao jednokratnu uplatu na vrijeme od $(n-1)$ godine. On konačnom zbroju doprinosi s Rq^{n-1}. Slično, iznos R uplaćen na kraju $(n-1)$. godine možemo smatrati jednokratnom uplatom na vrijeme od 1 godine. Iznos R uplaćen na kraju n-te godine štednje ne zaradi kamatu, on konačnoj vrijednosti doprinosi s R. Konačna vrijednost svih uplata jednaka je:

$$C_n = R + Rq + \cdots + Rq^{n-1}.$$

Pribrojnici čine geometrijski niz kome je prvi član R, a kvocijent q. Prema izrazu za zbroj prvih n članova geometrijskog niza, izračunamo konačnu vrijednost postnumerando uplata.

Izraz za konačnu vrijednost postnumerando uplata iznosa R kroz n godina uz dekurzivni kamatni faktor q je $\boxed{C_n = R\frac{q^n-1}{q-1}.}$

Primjer 11 *Neka osoba ulaže kroz* 5 *godina, krajem svake godine, u banku po* 1000 *kn. Koliko će novaca imati na kraju* 5. *godine ako je obračun kamata godišnji, složen i dekurzivan, a banka obračunava* 6% *godišnjih kamata kroz cijelo razdoblje štednje?*

Radi se o postnumerando računu. Imamo:

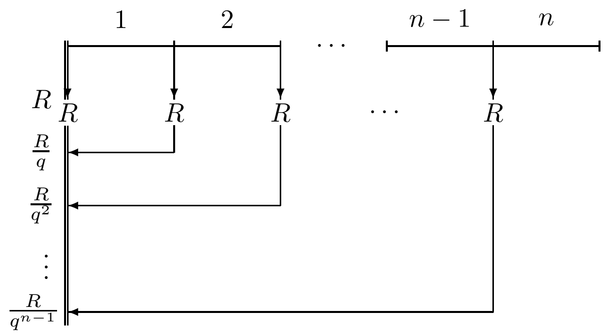
$$\begin{aligned} R &= 1000 \\ p &= 6\,, q = 1 + \tfrac{p}{100} = 1.06 \\ n &= 5. \end{aligned}$$

$$C_5 = R\frac{q^5 - 1}{q - 1} = 1000\frac{1.06^5 - 1}{1.06 - 1} \approx 5637.09.$$

Dalje promatramo drugi problem složenog kamatnog računa: problem određivanja početne vrijednosti kod složenog kamatnog računa s višekratnim isplatama. Precizno, problem je: kolikim iznosom A treba raspolagati danas da bi se na temelju njega u sljedećih n godina moglo isplaćivati nominalno jednake iznose R ako je obračun kamata godišnji, složen i dekurzivan uz fiksnu kamatnu stopu p u cijelom razdoblju.

Početna vrijednost prenumerando isplata

Od početne vrijednosti A_n želimo na početku svake od n godina isplaćivati nominalno jednake iznose R. Početna vrijednost jest iznos koji danas moramo imati na računu s kojega će se vršiti navedene isplate. Uzimamo da je kamatna stopa fiksna u cijelom vremenu i jednaka p, a obračun kamata godišnji, složen i dekurzivan. Kolikim iznosom A_n trebamo raspolagati? Ilustrirajmo slikom:



Na početku prve godine treba isplatiti iznos R, on ulazi u početni iznos. Na početku druge godine treba opet isplatiti iznos R, no on u početni iznos ulazi s vrijednošću $\frac{R}{q}$ jer će stajanjem godinu dana na računu upravo iznos $\frac{R}{q}$ narasti do $\frac{R}{q} \cdot q = R$. I tako razmišljamo dalje. Iznos R kojeg moramo isplatiti na početku n-te godine u početnoj vrijednosti jednak je $\frac{R}{q^{n-1}}$, jer će uložen na štednju kroz $(n-1)$ godinu s kamatama narasti do iznosa R. Dakle, početna vrijednost A_n mora biti jednaka:

$$A_n = R + \frac{R}{q} + \cdots + \frac{R}{q^{n-1}}.$$

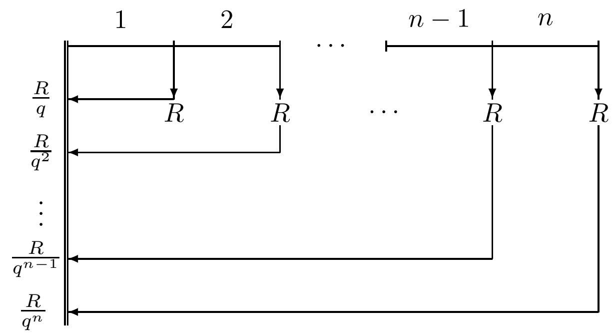
Pribrojnici tvore geometrijski niz kome je prvi član R, a kvocijent $\frac{1}{q}$. Zato je

$$A_n = R\frac{\left(\frac{1}{q}\right)^n - 1}{\frac{1}{q} - 1} = R\frac{\frac{1-q^n}{q^n}}{\frac{1-q}{q}} = R\frac{q(1-q^n)}{q^n(1-q)} = R\frac{(1-q^n)}{q^{n-1}(1-q)} = R\frac{(q^n-1)}{q^{n-1}(q-1)}.$$

Početna vrijednost prenumerando isplata iznosa R kroz n godina uz dekurzivni kamatni faktor q je $\boxed{A_n = R\frac{q^n-1}{q^{n-1}(q-1)}.}$

Početna vrijednost postnumerando isplata

Kolika mora biti početna vrijednost A_n želimo li na temelju nje kroz n godina isplaćivati iznos R na kraju svake godine?



Kao prije, početna vrijednost A_n jednaka je zbroju svih lijevo navedenih iznosa:

$$A_n = \frac{R}{q} + \frac{R}{q^2} + \cdots + \frac{R}{q^n}.$$

Pribrojnici tvore geometrijski niz kome je prvi član $\frac{R}{q}$, a kvocijent $\frac{1}{q}$. Stoga je

$$A_n = \frac{R}{q}\frac{\left(\frac{1}{q}\right)^n - 1}{\frac{1}{q} - 1} = \frac{R}{q}\frac{\frac{1-q^n}{q^n}}{\frac{1-q}{q}} = \frac{R}{q}\frac{q(1-q^n)}{q^n(1-q)} = R\frac{q^n - 1}{q^n(q-1)}.$$

Izraz za početnu vrijednost postnumerando isplata iznosa R kroz n godina uz dekurzivni kamatni faktor q je $\boxed{A_n = R\frac{q^n-1}{q^n(q-1)}.}$

Primjer 12 *Koliki iznos treba danas položiti u banku da bi se na osnovi njega u sljedećih* 5 *godina na početku svake godine moglo podizati* 1000 *kn? Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan i primjenjuje se fiksna godišnja kamatna stopa* 9.

$$\begin{aligned} R &= 1000 \\ n &= 5 \\ p &= 9\,,\ q = 1.09. \end{aligned}$$

Radi se o isplatama početkom svake godine pa je

$$A_5 = 1000\frac{1.09^5 - 1}{1.09^4(1.09-1)} \approx 4239.71.$$

1.5 Račun zajma

Trebate li veću količinu novca za neku investiciju, namaknut ćete ga zajmom. Zajmodavatelj (najčešće banka) na zajmu zarađuje budući zajmoprimatelj vraća iznos zajma uvećan za kamate. Zajam se vraća otplatama koje se nazivaju **anuiteti**. Anuiteti dospijevaju u jednakim vremenskim razmacima. Anuitet se sastoji od dva dijela:

1. **otplatne kvote** koja predstavlja stvarni iznos za koji se umanjuje glavnica zajma i
2. **složene kamate**.

Spominjemo dvije vrste otplate zajma: otplatu jednakim anuitetima i otplatu jednakim otplatnim kvotama.

1.5.1 Otplata zajma nominalno jednakim anuitetima

Uzimat ćemo:

- da je obračun kamata godišnji, složen i dekurzivan,
- da su anuiteti nominalno jednaki i da dospijevaju u jednakim vremenskim razmacima krajem godine (postnumerando),
- da je duljina razdoblja između ukamaćivanja jednaka duljini dospijeća između anuiteta i iznosi jednu godinu te
- da je kamatnjak fiksan u cijelom vremenu otplate (amortizacije) zajma.

Ustalimo oznake: iznos (glavnicu) odobrenog zajma označavat ćemo s C, a je oznaka za iznos nominalno jednakih anuiteta, n označava broj godina otplate zajma i p fiksni kamatnjak. q je i dalje oznaka za dekurzivni kamatni faktor. Iznos C možemo smatrati početnom vrijednošću složenog kamatnog računa s postnumerando isplatama iznosa a. Dakle,

$$C = a\frac{q^n - 1}{q^n(q-1)}.$$

Odavde dobivamo izraz za iznos nominalno jednakog anuiteta a.

Izraz za iznos nominalno jednakih anuiteta a u otplati zajma iznosa C kroz n godina uz dekurzivni kamatni faktor q je $\boxed{a = C\frac{q^n(q-1)}{q^n-1}.}$

Primjer 13 *Zajam od* 500000 *kn odobren je poduzeću na* 3 *godine uz* 9% *godišnjih kamata. Kolikim se nominalno jednakim anuitetima otplaćuje zajam?*

$$\begin{array}{rcl} C & = & 500000 \\ n & = & 3 \\ p & = & 9, \ q = 1.09. \end{array}$$

$$a = 500000 \frac{1.09^3(1.09-1)}{(1.09^3-1)} \approx 197527.38$$

Plan otplate zajma, otplatna tablica

Plan otplate zajma bilježi se otplatnom tablicom. Njeno zaglavlje ima sljedeći oblik

kraj razdoblja	anuitet	kamata	otplatna kvota	ostatak duga

U otplatnoj tablici se za i. razdoblje ($i \in \{1, 2, \ldots, n\}$) otplate zajma naznačuje: iznos anuiteta a, kamate I_i, otplatne kvote R_i i ostatka duga C_i na kraju tog razdoblja.

Zajam se otplaćuje jednakim anuitetima a pa u drugi stupac otplatne tablice u svim razdobljima unosimo a. Kamata I_i se na kraju i-tog razdoblja računa po jednostavnom kamatnom računu na svotu ostatka duga C_{i-1} iz prethodnog razdoblja:

$$I_i = \frac{C_{i-1} \cdot p}{100}.$$

Anuitet je jednak zbroju kamate i otplatne kvote to jest

$$a = I_i + R_i.$$

Dakle, znamo odrediti i iznos otplatne kvote R_i na kraju i-tog razdoblja:

$$R_i = a - I_i.$$

Ostatak duga C_i na kraju i-tog razdoblja jednak je ostatku duga C_{i-1} iz prethodnog razdoblja umanjenom za otplatnu kvotu R_i u tom razdoblju, odnosno

$$C_i = C_{i-1} - R_i.$$

U tablicu unosimo i nulto razdoblje u kome je ostatak duga jednak C.

Primjer 14 *Sastavimo otplatnu tablicu za zajam iz primjera 14.*

Iznos anuiteta smo izračunali $a = 197527.38$ i on je stalan kroz sve godine. Također, $C_0 = C$. Izračunajmo podatke za kraj prve godine:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{C_0 p}{100} = \frac{500000 \cdot 9}{100} = 45000, \\ R_1 &= a - I_1 \approx 152527.38, \\ C_1 &= C_0 - R_1 \approx 347472.62. \end{aligned}$$

Na kraju druge godine je:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{C_1 p}{100} \approx 31272.54, \\ R_2 &= a - I_2 \approx 166254.84, \\ C_2 &= C_1 - R_2 \approx 181217.88. \end{aligned}$$

Slično bismo izračunali podatke za kraj preostale, treće godine. Podatke upišemo u otplatnu tablicu:

i	a	I_i	R_i	C_i
0	-	-	-	*500000*
1	*197527.38*	*45000*	*152527.38*	*347572.62*
2	*197527.38*	*31272.54*	*166254.84*	*181217.88*
3	*197527.38*	*16309.60*	*181217.88*	*0*
$\sum$	*592582.14*	*92582.14*	*500000*	*/*

U zadnjem retku tablice su zbrojevi svih elemenata pojedinih stupaca. Ti se zbrojevi koriste pri kontroli točnosti elemenata otplatne tablice.

Kontrola točnosti elemenata otplatne tablice

Kako provjeriti je li izrađena otplatna tablica točna? Već se za vrijeme izrade može provesti kontrola točnosti jer za svaki element tablice postoji formula za njegovo izračunavanje, ne preko prethodnih izraza već neovisno o njima. Mi ćemo ovdje navesti kako kontrolirati točnost **gotove** otplatne tablice:
a) otplatnim se kvotama otplaćuje dug, znači **zbroj svih otplatnih kvota jednak je iznosu zajma** C,
b) **zbroj svih anuiteta jednak je iznosu zajma uvećanom za zbroj svih kamata**.

Provjerimo li po ovim elementima otplatnu tablicu iz primjera 15, vidimo da je točna.

1.5.2 Otplata zajma nominalno jednakim otplatnim kvotama

U ovom slučaju otplate zajma uzimamo:

- da je obračun kamata godišnji, složen i dekurzivan,
- da su otplatne kvote nominalno jednake,
- da je duljina razdoblja između ukamaćivanja jednaka duljini dospijeća između anuiteta i iznosi jednu godinu te
- da je kamatnjak fiksan u cijelom vremenu otplate (amortizacije) zajma.

Označimo iznos otplatnih kvota s R. R ćemo lako izračunati: kako se glavnica C otplaćuje upravo nominalno jednakim otplatnim kvotama kroz n razdoblja, onda je

$$R = \frac{C}{n}.$$

Kamate računamo kao ranije. Anuitete računamo kao $a_i = I_i + R$. Iznosi ostataka duga također se računaju kao prije. Kontrolu otplatne tablice radimo kao i u slučaju otplata zajma nominalno jednakim anuitetima.

Primjer 15 *Sastavimo otplatnu tablicu za otplatu zajma od* 500000 *kn koji je poduzeću odobren na* 4 *godine uz* 9% *kamate ako se zajam otplaćuje nominalno jednakim otplatnim kvotama.*

$$\begin{aligned} C &= 500000, \\ n &= 4, \\ p &= 9 \end{aligned}$$

Nominalno jednake otplatne kvote imaju iznos: $R = \frac{C}{n} = \frac{500000}{4} = 125000$. *Na kraju prve godine je:*

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{C_0 p}{100} = 45000, \\ a_1 &= I_1 + R_1 = 170000, \\ C_1 &= C_0 - R_1 = 375000. \end{aligned}$$

Sastavimo otplatnu tablicu:

i	a	I_i	R_i	C_i
0	-	-	-	500000
1	170000	45000	125000	375000
2	158750	33750	125000	250000
3	147500	22500	125000	125000
4	136250	11250	125000	0
$\sum$	612500	112500	500000	/

Kontrolu točnosti otplatne tablice radimo kao u slučaju otplate zajma nominalno jednakim anuitetima. Ova otplatna tablica je točna.

1.6 Račun rente

Rentom zovemo plaćanja koja se javljaju u pravilnim vremenskim razmacima. Iznosi plaćanja mogu biti jednaki ili promjenjivi, mogu se uplaćivati ili isplaćivati početkom (prenumerando) ili krajem (postnumerando) razdoblja. Razlikujemo:

1. uplate: rentni iznosi r uplaćuju se na neki račun i ukamaćuju po složenom kamatnom računu za višestruke uplate,
2. isplate: rentni iznosi r isplaćuju se od uloženog iznosa (glavnice) ukamaćenog po složenom kamatnom računu. Primjenjuju se izrazi kao kod otplate zajmova s razlikom što anuitet zovemo renta. Ukoliko je iznos rente manji od do tada dospjelih kamata, govori se o **vječnoj renti**.

Primjer 16 *Od iznosa* 200000 *kn se kroz 15 godina isplaćuju jednaki iznosi rente krajem godine. Koliki su iznosi rente ako je fiksni godišnji kamatnjak* 9*, a obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan?*

$$\begin{aligned} C &= 200000 \\ n &= 15 \\ p &= 9,\ q = 1.09. \end{aligned}$$

Da bismo izračunali iznos rente, koristimo izraz kao kod računanja anuiteta:

$$r = C \cdot \frac{q^n(q-1)}{q^n-1} \approx 24811.78.$$

1.7 Račun otpisa

Kod dobara kojima se zbog habanja ili starenja smanjuje vrijednost, jednom godišnje provodi se otpis (amortizacija). Otpisivanjem se u danoj godini vrijednost s početka godine reducira na ostatak vrijednosti na kraju godine. U računu ćemo koristiti oznake:

1. A - iznos nabavne vrijednosti dobra,
2. N - trajanje dobra izraženo u godinama,
3. R_n - iznos ostatka vrijednosti nakon n godina,
4. a_n - iznos otpisne kvote u n-toj godini otpisa.

Ako su otpisne kvote a_n jednake u svakoj godini otpisa, govorimo o **linearnom otpisivanju**. Ako su otpisne kvote opadajuće, govorimo o **degresivnom otpisivanju**.

1.7.1 Linearno otpisivanje

Kod **linearnog otpisivanja** su godišnji iznosi otpisa konstantni: $a_n = a$. Neka je A nabavna vrijednost dobra, N njegovo trajanje u godinama, a R_N ostatak cijene nakon isteka vremena trajanja dobra. Jednake godišnje iznose otpisa računamo po formuli

$$a = \frac{A - R_N}{N}.$$

Ostatak vrijednosti dobra nakon n godina jednak je

$$R_n = A - na, \;\; n \leq N.$$

Primjer 17 *Nabavna cijena stroja iznosi* $A = 50000$ *kn. Otpišimo ga linearno za* $N = 5$ *godina na ostatak vrijednosti* $R_5 = 10000$ *kn.*

Jednake otpisne kvote imaju iznos:

$$a = \frac{A - R_N}{N} = \frac{50000 - 10000}{5} = 8000.$$

Nabavna se vrijednost stroja na kraju svake godine otpisa umanjuje za 8000 *kn. Dakle, ostatak vrijednosti nakon prve godine otpisa je* $R_1 = 42000$ *kn. Računajući dalje dobivamo:*

$$R_2 = 34000, R_3 = 26000, R_4 = 18000, R_5 = 10000.$$

Kako je i traženo, stroj je u 5 *godina otpisan do ostatka vrijednosti od* 10000 *kn. Možemo sastaviti plan otpisa:*

godina	*poč. vr.* R_{n-1}	*otp. kvota a*	*ostatak vr.* R_n	*% otpisa,* p_n
1	*50000*	*8000*	*42000*	*16.0*
2	*42000*	*8000*	*34000*	*19.05*
3	*34000*	*8000*	*26000*	*23.53*
4	*26000*	*8000*	*18000*	*30.77*
5	*18000*	*8000*	*10000*	*44.44*

U zadnjem stupcu tablice izračunati su postotci otpisa. Postotak otpisa p_n *svote* a *od početne vrijednosti* R_{n-1} *računamo po formuli* $\frac{a}{R_{n-1}} \cdot 100$. *Kod linearnog otpisivanja vidljiv je jaki porast postotaka otpisa u odnosu na svaku sljedeću početnu vrijednost. To je "mana" linearnog otpisivanja.*

U primjeru smo vidjeli da postotci otpisa kod linearnog otpisivanja rastu. Želimo li postotke otpisa ujednačiti, jasno je da iznose otpisa treba s vremenom umanjivati. To je slučaj kod degresivnog otpisivanja.

1.7.2 Aritmetičko-degresivno otpisivanje

Slučaj **aritmetičko-degresivnog otpisa** jest slučaj kad se godišnje otpisne kvote umanjuju za stalan iznos d. One tada čine (padajući) aritmetički niz. Kod ovog otpisa poznata je prva otpisna kvota a_1, nabavna vrijednost dobra A i ostatak vrijednosti R_N. Iznos d umanjenja godišnje otpisne kvote da se izračunati. Naime, otpisne kvote su redom

$$a_1, a_2 = a_1 - d, \ldots, a_N = a_1 - (N-1)d.$$

Znamo da je zbroj svih otpisnih kvota u N godina otpisa jednak ukupnom iznosu otpisa, tj.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_N = A - R_N.$$

Prema izrazu za zbroj prvih N članova padajućeg aritmetičkog niza slijedi

$$\frac{N}{2}(2a_1 - (N-1)d) = A - R_N.$$

Želimo odrediti d. Iz $Na_1 - \frac{N(N-1)}{2}d = A - R_N$ slijedi da je

$$\frac{N(N-1)}{2}d = Na_1 - (A - R_N).$$

Izraz za iznos razlike d za koju se umanjuju otpisne kvote pri aritmetičko-degresivnom otpisivanju, a uz zadane iznose prve otpisne kvote a_1, vremena otpisa N te početne vrijednosti A i ostatka vrijednosti R_N je $\boxed{d = 2\frac{[Na_1-(A-R_N)]}{N(N-1)}.}$

Primjer 18 *Nabavna cijena stroja iznosi $A = 50000$ kn. Stroj treba u roku od $N = 5$ godina aritmetičko-degresivnom metodom otpisati do vrijednosti $R_5 = 10000$ kn pri čemu se u prvoj godini otpisuje $a_1 = 15000$ kn. Sastavimo plan otpisa.*

Prvo po formuli izračunamo da je iznos d umanjenja otpisnih kvota jednak 3500. Sastavimo tablicu:

god.	*poč. vr.* R_{n-1}	*otp. kvota a*	*ostatak vr.* R_n	*% otpisa,* p_n
1	*50000*	*15000*	*35000*	*30*
2	*35000*	*11500*	*23500*	*32.90*
3	*23500*	*8000*	*15500*	*34.00*
4	*15500*	*4500*	*11000*	*29.00*
5	*11000*	*1000*	*10000*	*9.10*

Iz tablice u primjeru vidimo da su postotci otpisa (s iznimkom onog u posljednjoj godini) kod aritmetičko-degresivne metode uravnoteženiji nego kod linearnog otpisa.

1.7.3 Geometrijsko-degresivno otpisivanje

Kod metode geometrijsko-degresivnog otpisa se svake godine otpisuje $p\%$ ostatka vrijednosti iz prethodne godine. Dakle, postotak otpisa je fiksan i iznosi p. Ostatak vrijednosti nakon godinu dana je

$$R_1 = A - \frac{A \cdot p}{100} = A\left(1 - \frac{p}{100}\right).$$

Dalje je

$$R_2 = R_1 - \frac{R_1 \cdot p}{100} = R_1\left(1 - \frac{p}{100}\right) = A\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2.$$

Općenito je

$$R_n = A\left(1 - \frac{p}{100}\right)^n.$$

Vidimo otkud metodi naziv: ostatci vrijednosti čine geometrijski niz čiji je prvi član $A\left(1 - \frac{p}{100}\right)$, a kvocijent $1 - \frac{p}{100}$. U pravilu je u računu zadano A, a na temelju zadanih dviju od triju preostalih veličina R_n, p i n odredi se nepoznata veličina.

Primjer 19 *Stroj nabavne vrijednosti* 50000 *kn otpišimo kroz 4 godine geometrijsko-degresivnom metodom uz 20 % vrijednosti godišnje.*

$$\begin{aligned} A &= 500000 \\ n &= 4 \\ p &= 20. \end{aligned}$$

Računamo ostatke vrijednosti:

$$R_1 = 50000\left(1 - \frac{20}{100}\right) = 40000, R_2 = 50000\left(\frac{4}{5}\right)^2 = 32000, R_3 = 25600, R_4 = 20480.$$

Tablica otpisa je

god.	*poč. vr.* R_{n-1}	*otp. kvota* a	*ostatak vr.* R_n	*% otpisa,* p_n
1	*50000*	*10000*	*40000*	*20*
2	*40000*	*8000*	*32000*	*20*
3	*32000*	*6400*	*25600*	*20*
4	*25600*	*5120*	*20480*	*20*

1.8 Zadatci

1. Odredite opći član aritmetičkog niza $-3, 0, 3, ...$
2. Odredite zbroj prvih 20 članova aritmetičkog niza $1, 3, 5, 7, ...$

3. Odredite opći član geometrijskog niza $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$.

4. Neka osoba danas u banku uloži 20000 kn. Izračunajte vrijednost uloga na kraju desete godine od danas ako je obračun kamata godišnji, složen i dekurzivan uz fiksnu godišnju kamatnu stopu $p = 8$. Koliki je ukupni iznos složenih kamata?

5. Neka osoba uplaćuje iznos od 2000 kn na kraju svake godine kroz 10 godina. Izračunajte iznos kojim raspolaže po isteku štednje ako je obračun kamata godišnji, složen i dekurzivan uz fiksni godišnji kamatnjak $p = 8$.

6. Koliki iznos valja uplaćivati u banku početkom svake godine ako se na kraju osme godine na osnovi tih uplata želi raspolagati iznosom od 50000 kn? Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan i primjenjuje se kamatna stopa 4.9.

7. Koliki iznos valja danas uložiti u banku da bismo na osnovi tog uloga u idućih 13 godina početkom svake godine mogli podizati po 13000 kn? Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan i primjenjuje se kamatna stopa od $p = 13$.

8. Neka osoba ima otvorena dva računa štednje: na jednoga je jednokratno uložila 10000 kn uz godišnju kamatnu stopu od 3.5, a na drugoga krajem svake godine uplaćuje po 1 200 kn uz kamatnu stopu od 4% godišnje. Na kojem od ta dva računa će osoba nakon 8 godina imati veću svotu novaca?

9. Izračunajte kolika je konačna vrijednost na računu po isteku 15 godina štednje ako osoba na račun krajem svake godine kroz 10 godina uplaćuje iznos od 6000 kn te ako je obračun kamata godišnji, složen i dekurzivni uz fiksni godišnji kamatnjak $p = 4$.

10. Zajam od 500000 kn je odobren poduzeću na 10 godina uz 9% godišnjih kamata i otplaćuje se jednakim anuitetima na kraju godine. Odredite iznos nominalno jednakih anuiteta.

11. Zajam je odobren poduzeću na 5 godina uz 4% godišnjih kamata i otplaćuje se jednakim anuitetima $a = 50000$ kuna na kraju godine. Odredite iznos zajma.

12. Zajam od 150000 kn odobren je poduzeću na 5 godina uz 4% kamata i plaćanje postnumerando anuitetima pri čemu su nominalno jednake otplatne kvote. Sastavite otplatnu tablicu.

13. Izradite otplatnu tablicu za plan otplate zajma od 80000 kn jednakim otplatnim kvotama. Zajam je odobren poduzeću na 8 godina uz 7.5% godišnjih kamata, a obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan.

14. Nabavna vrijednost stroja iznosi 125000 kn. Otpišite ga u roku od 8 godina aritmetičko-degresivnom metodom do iznosa 50000 kn.

Poglavlje 2

Linearna algebra

2.1 Vektori u n-dimenzionalnom realnom prostoru

Vektori u n-dimenzionalnom realnom prostoru $\mathbf{R}^n$ su uređene n-torke realnih brojeva. Dakle, vektor $\vec{a}$ zadan je s $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $a_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Dva vektora $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ su jednaka ako i samo ako je $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $\cdots$, $a_n = b_n$.

Osnovne računske operacije s vektorima

Neka su zadani vektori $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Definiramo:

1. **zbroj vektora** $\vec{a}$ i $\vec{b}$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n),$$

2. **razliku vektora** $\vec{a}$ i $\vec{b}$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n),$$

3. **skalarni produkt** vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kao broj

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n,$$

4. **množenje vektora skalarom**: za vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $\lambda \in \mathbf{R}$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n),$$

5. **duljinu vektora** $\vec{a}$ s

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2}.$$

Duljina vektora naziva se još i **norma** vektora ili **apsolutna vrijednost** vektora. Kao što vidimo iz definicija, $\|\vec{a}\|$ se računa po formuli

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}.$$

Istaknuti vektor u $\mathbf{R}^n$ je **nul-vektor**, u oznaci $\vec{0}$; $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$. Posebno se označavaju i vektori: $\vec{e_1} = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $\vec{e_2} = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\vec{e_n} = (0, 0, 0 \ldots, 1)$. Svaki vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ možemo zapisati kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}$:

$$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + \cdots a_n\vec{e_n}.$$

Linearna nezavisnost vektora

Definicija 7 *Vektori* $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_m}$, $m \in \mathbf{N}$, $\vec{a_k} \in \mathbf{R}^n$ *za sve* $k \in \{1, 2, \ldots m\}$ *su* **linearno nezavisni** *ako iz*

$$\alpha_1\vec{a_1} + \alpha_2\vec{a_2} + \cdots + \alpha_m\vec{a_m} = \vec{0}$$

slijedi $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$. *Vektore koji nisu linearno nezavisni zovemo* **linearno zavisnima**.

Vektori $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}$ n-dimenzionalnog realnog prostora $\mathbf{R}^n$ su linearno nezavisni. Naime, za $\alpha_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ jednadžba

$$\alpha_1\vec{e_1} + \alpha_2\vec{e_2} + \cdots + \alpha_n\vec{e_n} = \vec{0}$$

povlači

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \vec{0},$$

što je ako i samo ako je $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Primjer 20 *Jesu li vektori* $\vec{a_1} = (2, -3, 1)$, $\vec{a_2} = (1, 1, 1)$ *i* $\vec{a_3} = (0, 1, -1)$ *linearno nezavisni u* $\mathbf{R}^3$*?*

Želimo znati za koje realne brojeve $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ je

$$\alpha_1\vec{a_1} + \alpha_2\vec{a_2} + \alpha_3\vec{e_3} = \vec{0}.$$

Uvrstimo vektore:

$$\alpha_1(2, -3, 1) + \alpha_2(1, 1, 1) + \alpha_3(0, 1, -1) = (0, 0, 0).$$

Sredimo izraz s lijeve strane; dobivamo

$$(2\alpha_1 + \alpha_2, -3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) = (0, 0, 0).$$

Rješavanjem sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ -3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

dobivamo da je $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Zaključujemo da zadani vektori jesu linearno nezavisni.

2.2 Matrice

Definicija 8 Matrica A **tipa** $m \times n$ *je tablica od $m \cdot n$ elemenata (realnih brojeva) koji su svrstani u m redaka i n stupaca:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Kraće se piše $A = (a_{ij})$. Element a_{ij} matrice A nalazi se na sjecištu i-tog retka i j-tog stupca.

Ako je $m = n$, matricu A zovemo **kvadratna matrica reda** n. **Glavnu dijagonalu** *kvadratne matrice A reda n čine elementi: $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, a njenu* **sporednu dijagonalu** *čine elementi: $a_{1n}, a_{2\,n-1}, \dots, a_{n1}$.*

2.2.1 Posebne matrice

1. **Nul-matricom** zovemo matricu bilo kojeg tipa čiji su svi elementi jednaki 0:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Matrica tipa $n \times 1$ zove se **vektor-stupac**. Matrica tipa $1 \times n$ zove se **vektor-redak**.

3. Kvadratnu matricu reda n u kojoj su elementi na glavnoj dijagonali jednaki 1, a svi izvan nje 0, označavamo s I_n i zovemo **jedinična matrica** reda n. Dakle,

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

4. **Dijagonalnom matricom** zovemo kvadratnu matricu kojoj su svi elementi izvan glavne dijagonale jednaki 0:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

5. Kvadratnu matricu zovemo **gornje-trokutasta** ako su joj svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki 0:

$$G_T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

   Donje-trokutasta je ona kvadratna matrica u kojoj su svi elementi iznad glavne dijagonale jednaki 0:

$$D_T = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & a_{n-1\,3} & \cdots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

2.2.2 Operacije s matricama

Posebna operacija nad matricama je **transponiranje**. Za matricu $A = (a_{ij})$ tipa $m \times n$, transponirana matrica je matrica

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Uočavamo da pri transponiranju matrice retci postaju stupci i obratno.

Primjer 21

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Slijedi definiranje računskih operacija s matricama.

A) Zbrajanje matrica

Matrice je moguće zbrojiti samo ako su istog tipa. Imamo li matrice $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$, obje tipa $m \times n$, njihov je zbroj matrica $C = (c_{ij})$ tipa $m \times n$, pri čemu je

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Pišemo $A + B = C$. Elementi matrice C dobiveni su zbrajanjem odgovarajućih elemenata matrica A i B. Pogledajmo primjer.

Primjer 22

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

B) Množenje matrice skalarom

Ako je zadan $\alpha \in \mathbf{R}$ i matrica $A = (a_{ij})$ tipa $m \times n$, onda je matrica αA tipa $m \times n$ i zadana je s

$$\alpha A = (\alpha a_{ij}).$$

Primjer 23

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Definicija 9 **Suprotna** *matrica matrice* A *je matrica* $-A = (-a_{ij})$.

C) Oduzimanje matrica

Neka su A i B matrice istog tipa. Tada je

$$C = A - B = A + (-B).$$

Oduzeti matricu B od matrice A znači zbrojiti matricu A sa suprotnom matricom matrice B.

Svojstva zbrajanja i oduzimanja matrica

1. Zbrajanje matrica je **komutativno**. Ako su matrice A i B istog tipa, tada je
$$A + B = B + A.$$
2. Zbrajanje matrica je **asocijativno**. Ako su matrice A, B, C istog tipa, tada je
$$A + (B + C) = (A + B) + C.$$
3. Nul-matrica (odgovarajućeg tipa) je **neutralni element** za zbrajanje matrica, to jest vrijedi
$$O + A = A + O = A.$$
4. Zbroj matrice i njoj suprotne matrice je nul-matrica istog tipa: $A + (-A) = O$.

D) Množenje matrica

Množenje matrica je nešto složenija operacija. Matrice možemo množiti **samo ako su ulančane**, to jest, ako je broj stupaca prve matrice jednak broju redaka druge matrice. Ako su matrice A i B ulančane i A je tipa $m \times n$, tada B mora biti tipa $n \times r$ za neki $r \in \mathbf{N}$. **Produkt matrica** A i B, pri čemu je matrica A tipa $m \times n$, a matrica B tipa $n \times r$ je matrica C tipa $m \times r$, $C = A \cdot B = (c_{ij})$. Pritom je
$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

. . . .

Množenje matrica možemo vizualizirati na sljedeći način. Svaki od m redaka matrice A možemo smatrati jednim vektorom, dakle imamo vektore:
$$\vec{a_i} = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}), \;\; i = 1 \ldots, m.$$
Slično, svaki od r stupaca matrice B također možemo smatrati jednim vektorom, pa imamo vektore:
$$\vec{b_j} = (b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj}), \;\; j = 1, \ldots r.$$
Primjetimo da su zbog ulančanosti matrica A i B vektori $\vec{a_i}$, $\vec{b_j}$ za sve i, j elementi od $\mathbf{R}^n$. Element c_{ij} matrice $C = A \cdot B$ dobivamo tako da skalarno pomnožimo $\vec{a_i}$ s $\vec{b_j}$; dakle, vektor iz i. retka matrice A skalarno množimo s vektorom iz j. stupca matrice B. Kako imamo m vektora-redaka u A i r vektora stupaca u B, mogućih umnožaka ima $m \cdot r$.

. . . .

Primjer 24 *Pomnožimo matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrice A i B su ulančane: prva je tipa 3×2, druga 2×2. Zato možemo izračunati $A \cdot B$ i umnožak je matrica tipa 3×2. Da bismo dobili element na mjestu $(1,1)$ umnoška, množimo skalarno vektor iz 1. retka matrice A s vektorom iz 1. stupca matrice B. Dalje, element umnoška na mjestu $(1,2)$ dobivamo kao skalarni produkt vektora iz 1. retka matrice A i vektora iz 2. stupca matrice B. Općenito, na mjestu (i,j) umnoška stoji skalarni produkt vektora iz i. retka matrice A s vektorom iz j. stupca matrice B. Dakle,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) & 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) & 3 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Uočimo da produkt $B \cdot A$ nije definiran jer, u ovom poretku, B i A nisu ulančane: B je tipa 2×2, a A tipa 3×2.

Primjer 25 *Zadane su matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Odredimo $A \cdot B$ i $B \cdot A$.

Matrice su ulančane u oba poretka množenja, pa su oba produkta dobro definirana.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) & 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \\ -1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & -1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vidimo iz primjera da množenje matrica **nije komutativno**. Čak i ako je moguće izračunati $A \cdot B$ i $B \cdot A$, općenito

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Svojstva množenja matrica

1. Množenje matrica **je asocijativno**, to jest, ako je moguće izvesti sve navedene operacije, tada je
$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

2. **Množenje matrica je distributivno prema zbrajanju matrica**: ako je moguće izvesti sve navedene operacije, tada je

$$\begin{aligned} A \cdot (B + C) &= A \cdot B + A \cdot C \\ (A + B) \cdot C &= A \cdot C + B \cdot C \end{aligned}$$

3. Neka je A kvadratna matrica reda n. Tada je

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A.$$

   Kažemo da je jedinična matrica reda n **jedinični element** za množenje s matricama reda n.

4. Matrica A pomnožena nul-matricom odgovarajućeg tipa kao rezultat daje nul-matricu:

$$A \cdot O = O \cdot A = O.$$

Ako je zadana kvadratna matrica A, možemo definirati potencije matrice A:

$$A^2 = A \cdot A\,,\; A^3 = A \cdot A \cdot A\,,\; \ldots$$

2.2.3 Rang matrice

Možemo smatrati da su u retke (stupce) matrice složeni vektori. Naučit ćemo kako uz pomoć elementarnih transformacija nad matricom odrediti najveći broj linearno nezavisnih vektora među svim vektorima u matrici. Budući da razlikujemo vektore u retcima matrice i one u stupcima matrice, važno je znati sljedeće.

Teorem 1 *Najveći broj linearno nezavisnih redaka matrice A jednak je najvećem broju linearno nezavisnih stupaca matrice A.*

Definicija 10 *Najveći broj (r) linearno nezavisnih redaka (stupaca) matrice A zovemo* **rang matrice** *A i pišemo* $\mathrm{rang} A = r$.

Primjer 26 *Matrica*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

očigledno je ranga 1 *jer ima dva jednaka stupca.*

Određivanje ranga matrice

Općenito se rang matrice određuje **Gaussovim algoritmom**. Opisujemo ga u nastavku. Rang matrice određuje se provođenjem elementarnih transformacija nad retcima (stupcima) matrice. Elementarne transformacije su:

1. međusobna zamjena dvaju redaka (stupaca) matrice,
2. množenje retka (stupca) matrice brojem različitim od 0,
3. dodavanje retka (stupca) matrice drugom retku (stupcu) matrice.

Primjenom elementarnih transformacija ne mijenja se rang matrice, a matricu transformiramo u gornje-trokutastu. Pokazuje se da je rang tako transformirane matrice jednak broju redaka (stupaca) koji su različiti od nul-vektora.

Ovdje ćemo, budući je to dovoljno za kasnije primjene, Gaussov algoritam provoditi samo nad retcima matrice. U tom je slučaju rang matrice jednak broju redaka koji su različiti od nul-vektora.

Primjer 27 *Odredimo rang matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ *Gaussovim algoritmom.*

Matricu želimo svesti na gornje-trokutasti oblik. Želimo ispod broja 1 *koji se nalazi na mjestu* $(1,1)$ *imati* 0*, stoga taj element proglasimo* **pivotnim elementom***. Nad matricom smijemo provoditi elementarne transformacije jer one čuvaju rang matrice. Pomnožimo prvi* (I) *redak matrice* A *brojem* -2 *(suprotnim brojem broja* 2 *koji je ispod pivotnog elementa) te ga dodamo drugom* (II) *retku. Poslije tih transformacija na mjestu* $(2,1)$ *matrice dobivamo* 0*:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \scriptstyle -2I+II \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Redak u kome je uzet pivotni element se pri provođenju elementarnih transformacija ne mijenja već se prepisuje dalje. Naznačene operacije provode se napamet; rezultat se zapisuje u redak koji transformiramo. U dobivenoj gornje-trokutastoj matrici imamo samo jedan vektor (redak) različit od nul-vektora. Dakle, rang matrice A *jednak je* 1*.*

Primjer 28 *Odredimo rang matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Proglasimo element 1 *na mjestu* $(1,1)$ *pivotnim elementom. Želimo na mjestima* $(2,1)$ *i* $(3,1)$ *dobiti* 0*. Za dobivanje* 0 *na mjestu* $(2,1)$ *množimo* I*. redak brojem* -3 *i dodajemo ga* II*. retku. Za dobivanje* 0 *na mjestu* $(3,1)$ *zbrojimo* I*. redak s* II*. retkom. Pored matrice naznačujemo račune. Redak u kome je pivotni element prepisujemo, ostale retke transformiramo:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} {\scriptstyle -3I+II} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} {\scriptstyle I+II} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Sada za pivotni element uzimamo broj 1 *na mjestu* $(2,2)$*. Kako matricu želimo svesti na gornje-trokutast oblik, moramo ispod glavne dijagonale imati same* 0*. Prvi redak prepišemo, drugi također. Element* 1 *na mjestu* $(3,2)$ *pretvorit ćemo u* 0 *pomnožimo li* II*. redak brojem* -1 *pa umnožak pribrojimo* III*. retku.*

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} {\scriptstyle -II+III} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrica A *svedena je na gornje trokutasti oblik. Niti u jednom retku nemamo nulvektor pa zaključujemo da rang matrice* A *iznosi* 3.

Primijetimo da je za pivotni element dobro imati broj 1 jer je tada olakšano "poništavanje" elemenata ispod pivotnog. Naime, jednostavno množimo redak u kojemu je uzet pivotni element brojem suprotnim elementu kojeg poništavamo i zbrojimo odgovarajuće retke.

Primjer 29 *Odredimo rang matrice*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -4 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -4 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} {\scriptstyle -2I+II} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} {\scriptstyle I+III} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

Sada podijelimo drugi redak brojem 2 *da pivotni element na mjestu* $(2,2)$ *bude jednak* 1.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} {\scriptstyle :2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} {\scriptstyle 2II+III} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrica B *je ranga* 2.

2.2.4 Inverz matrice

Definicija 11 *Kvadratna matrica A reda n je* **regularna** *ako postoji matrica B reda n takva da je*

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n.$$

Matrica B zove se **inverzna matrica matrice** *A. Pišemo $B = A^{-1}$. Matrica koja nije regularna zove se* **singularna**.

Teorem 2 *Kvadratna matrica reda n je regularna ako i samo ako joj je rang maksimalan, odnosno jednak upravo n.*

Primjer 30 *Provjerimo da je matrica*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sama sebi inverzna.

Treba provjeriti da je $A^{-1} = A$. No, to je očito budući je $A \cdot A = I_2$. Provjerite množenjem.

Postupak određivanja inverza matrice

Kod traženja inverza regularne kvadratne matrice A reda n, radimo sljedeće:

1. pripisivanjem jedinične matrice reda n uz matricu A sastavimo proširenu matricu $(A|I_n)$,
2. provođenjem elementarnih transformacija nad retcima dovedemo načinjenu proširenu matricu do oblika $(I_n|B)$,
3. $B = A^{-1}$, dakle, na desnoj strani dobivene proširene matrice je inverz matrice A.

Algoritam po kojem radimo je opet Gaussov. Makar je postupak određivanja inverza naveden za regularnu kvadratnu matricu, možemo ga provoditi i za matricu A za koju ne znamo je li regularna. Naime, ukoliko načinjenu proširenu matricu $(A|I_n)$ ne uspijemo transformirati u oblik $(I_n|B)$, odnosno ne uspijemo slijeva dobiti I_n, znači da je polazna matrica A singularna.

Primjer 31 *Odredimo inverz matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Načinimo proširenu matricu, matrici A *s desne strane pripišemo jediničnu matricu reda* 3*:*

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{-2I+II} \sim$$

"Poništavamo" elemente ispod pivotnog elementa 1 *na mjestu* $(1,1)$*. Transformacije provodimo nad prvim retkom; ravnopravno su uključeni i elementi pripisane jedinične matrice:*

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{-3I+III} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Element -2 *na mjestu* $(2,2)$ *već ima iznad i ispod sebe* 0*. To znači da treba tek cijeli* II *redak podijeliti s* -2 *kako bismo na mjestu* $(2,2)$ *imali broj* 1 *(s lijeve strane proširene matrice želimo dobiti jediničnu matricu!):*

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)_{:(-2)} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Posljednji pivotni element je broj -3 *na mjestu* $(3,3)$*. Da tu dobijemo broj* 1*, podijelimo* III*. redak s brojem* -3*:*

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)_{:(-3)} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

U trećem stupcu matrice osim pivotnog elementa 1 *ostale elemente moramo poništiti. U tu svrhu* III*. redak množimo brojem suprotnim broju kojeg želimo poništiti i umnožak dodajemo retku u kome poništavamo element:*

$$\begin{aligned} &\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right)_{-\frac{3}{2}III+II} \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right)_{-III+I} \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right). \end{aligned}$$

Dobili smo da je

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Lako je provjeriti jesmo li dobro izračunali. Znamo da treba biti $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$*. Provjerite sami množenjem!*

Primjer 32 *Odredimo inverz matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Napišimo proširenu matricu:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Pivotni element je broj 1 *koji se nalazi na mjestu* $(1,1)$*. "Poništimo" sve elemente prvog stupca osim pivotnog elementa. Pišemo odjednom:*

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2I+II \\ I+III \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Sad je pivotni element 1 *na mjestu* $(2,2)$*. Iznad njega već stoji* 0 *pa poništavamo broj* -1 *koji je ispod njega:*

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \; II+III \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Sada vidimo da nije moguće dobiti jediničnu matricu na lijevoj strani proširene matrice budući smo dobili sve 0 *u trećem retku. Zaključujemo da je matrica* A *singularna, odnosno nema inverz.*

Primjer 33 *Odredimo inverz matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Napišimo proširenu matricu. Prvi redak dijelimo s 2 da na mjestu $(1,1)$ *dobijemo pivotni element* 1*:*

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) :2 \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

"Poništimo" sve elemente prvog stupca osim pivotnog elementa. Pišemo odjednom:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} {\scriptstyle -3I+II} \\ {\scriptstyle I+III} \\ \ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

Sad je pivotni element 1 *na mjestu* $(2,2)$*. Iznad njega već stoji* 0*. Poništavamo jedinicu koja je ispod njega:*

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} {\scriptstyle -II+III} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

Na kraju poništimo sve elemente trećeg stupca iznad pivotnog elementa 1 *na mjestu* $(3,3)$*:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \ \\ {\scriptstyle -2III+I} \\ {\scriptstyle III+II} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{7}{2} & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dobili smo inverz matrice A*,*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & 2 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Primjer 34 *Odredimo inverz matrice*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrica B *ima rang 3, dakle, regularna je.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} {\scriptstyle -I+III} \\ \ \\ \ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} {\scriptstyle :(-1)} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gotovo! Inverz matrice B *je*

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2.5 Determinanta matrice

Definicija 12 *Svakoj kvadratnoj matrici A reda n*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

pridružen je broj $\det A$ *koji se zove* **determinanta matrice** *i zapisuje*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Determinanta se definira rekurzivno ovako:

1. $\det(a_{11}) = |a_{11}| = a_{11}$,
2. *za matricu A reda $n \geq 2$ je* $\det A$ *zadana tzv. razvojem po i-tom retku kao*

   $$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij},$$

   pri čemu je A_{ij} jednak broju $(-1)^{i+j}$ pomnoženom s determinantom matrice koja se od matrice A dobiva ispuštanjem i-tog retka i j-tog stupca.

A_{ij} iz definicije se zove algebarski komplement elementa a_{ij}. Vrijednost determinante ne ovisi o tome po kojem je retku (stupcu) razvijamo. Pogledajmo što definicija konkretno znači.
Za $n = 1$ je po definiciji $|a_{11}| = a_{11}$.
Za $n = 2$, razvojem po 1. retku dobivamo

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}(-1)^{1+1}|a_{22}| + a_{21}(-1)^{1+2}|a_{12}| = \\ &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \end{aligned}$$

Vidimo da se od umnoška elemenata glavne dijagonale oduzme umnožak elemenata sporedne dijagonale.
Za $n = 3$ je

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + \\ &+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - \\ &- a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

Za praktično računanje determinante matrice reda 3 pogodno je tzv. Sarrusovo pravilo. Izvan determinante dopisujemo, bez ikakva matematičkog značenja, samo kao pomoć, elemente prvih dvaju stupaca matrice te zatim od zbroja umnožaka elemenata u smjeru glavne dijagonale oduzimamo zbroj umnožaka elemenata u smjeru sporedne dijagonale:

$$\begin{array}{ccc}\left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array} & = & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ & - & a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{array}$$

(Uočite da je dobiveni izraz jednak gornjem, dobivenom po definiciji determinante.)

Svojstva determinante

1. Determinanta se množi nekim brojem tako da se tim brojem množe svi elementi nekog (jednog!) stupca ili retka.
2. Determinanta se ne mijenja ako nekom retku (stupcu) pribrojimo neki drugi redak (stupac).
3. Determinanta je jednaka 0 ako su svi elementi nekog retka (stupca) jednaki 0 ili ako su vektori u retcima (stupcima) matrice linearno zavisni.
4. Pri zamjeni dvaju redaka (stupaca) matrice mijenja se predznak determinante.
5. Za kvadratne matrice A i B reda n je $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.
6. Za kvadratnu matricu A reda n je $\det A^T = \det A$.

Spomenimo kako se inverz matrice određuje preko transponirane matrice algebarskih komplemenata. Neka je zadana regularna matrica A reda n. Tada je

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A_{adj},$$

gdje je A_{adj} adjunkta matrice A, to jest transponirana matrica algebarskih komplemenata matrice A:

$$A_{adj} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Napomenimo da regularnost dane kvadratne matrice možemo ispitati računanjem determinante te matrice i pozivanjem na sljedeći teorem.

Teorem 3 *Neka je A kvadratna matrica reda n. Matrica A je regularna ako i samo ako je* $\det A \neq 0$.

Primjer 35 *Odredimo inverz matrice A reda 2 zadane općim brojevima*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Računamo

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Ukoliko je $ad - bc \neq 0$, prema teoremu 3 je matrica A regularna pa ima inverznu matricu. Algebarski komplementi su redom: $A_{11} = d, A_{12} = -c, A_{21} = -b$ i $A_{22} = a$. Sada je

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

2.3 Matrice u rješavanju sustava linearnih jednadžbi

Definicija 13 *Neka su $m, n \in \mathbf{N}$ i $a_{ij}, b_i \in \mathbf{R}$ za $1 \leq i \leq m$ i $1 \leq j \leq n$. Sustav od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je sustav oblika*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Realni brojevi a_{ij} zovu se **koeficijenti sustava**. Koeficijente sustava možemo zapisati u matricu sustava

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Brojeve b_i zovemo **slobodnim koeficijentima**. Slobodne koeficijente možemo zapisati kao vektor-stupac:

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Nepoznanice također zapisujemo kao vektor-stupac

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Sada sustav iz definicije možemo zapisati u matričnom obliku kao $Ax = b$.

Sustav je **rješiv** ako postoji barem jedan vektor x koji uvršten u matričnu jednadžbu $Ax = b$ daje istinitu jednakost. Ima sustava koji nisu rješivi. Pitanje rješivosti sustava ilustriramo na primjeru sustava od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice.

Primjer 36

- *Neka je zadan sustav*

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 5 \\ x - y &= 2. \end{aligned}$$

Znamo da svaka jednadžba određuje pravac u koordinatnom sustavu. Rješenje sustava je točka u koordinatnom sustavu u kojoj se zadana dva pravca sijeku. Budući su zadani različiti neparalelni pravci, njihovo sjecište postoji i jedinstveno je određeno. Stoga i sustav jednadžbi ima jedinstveno rješenje. (Odredite ga!).

- *Riješimo sustav:*

$$\begin{aligned} -x + y &= 1 \\ -x + y &= 5. \end{aligned}$$

Jednadžbe sustava zadaju paralelne i različite pravce. Kako se različiti paralelni pravci ne sijeku, ovaj sustav nema rješenje. Kažemo da je sustav **nemoguć**, *nerješiv ili nekonzistentan. Primijetimo da je matrica sustava*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

singularna jer je $\det A = 0$.

- *Sad zadajmo sustav*

$$\begin{aligned} -x + y &= 1 \\ -2x + 2y &= 2. \end{aligned}$$

Uočimo da obje jednadžbe sustava zadaju jedan te isti pravac. Upitamo li se koje su točke presjeka pravca sa samim sobom, odgovor je: svaka točka na pravcu. Ovaj sustav, dakle, ima beskonačno mnogo rješenja. Kažemo da je **neodređen**.

Općenito vrijedi da sustav od n jednadžbi s n nepoznanica ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je rang matrice koeficijenata sustava jednak n. Sustav linearnih jednadžbi se rješava Gaussovim postupkom. Postupak je sljedeći:

- sastavimo proširenu matricu $(A|b)$,
- nad $(A|b)$ provodimo elementarne transformacije nad retcima da bismo je transformirali u oblik $(I_n|c)$,
- matrica c je vektor rješenja sustava.

Ilustriramo opisani postupak primjerom.

Primjer 37 *Odredimo rješenje sustava od tri jednadžbe s tri nepoznanice*

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 2 \\ x + 3y + 2z &= 1 \\ x + y + z &= 2. \end{aligned}$$

Sastavljamo proširenu matricu. Zamijenili smo prvi redak proširene matrice s drugim kako bismo na mjestu $(1,1)$ dobili pivotni element 1. Na dobivenoj proširenoj matrici provodimo elementarne transformacije nad retcima:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} {\scriptstyle -2I+II} \\ {\scriptstyle -I+III} \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ {\scriptstyle :(-5)} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ {\scriptstyle -3II+I} \\ {\scriptstyle 2II+III} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ {\scriptstyle III+I} \\ {\scriptstyle -III+II} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Dobili smo vektor rješenja

$$c = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vrijednosti nepoznanica su: $x = 2, y = -1, z = 1$. *Provjerite.*

Moramo li pri rješavanju sustava linearnih jednadžbi voditi računa o tome je li sustav neodređen ili nemoguć? Ne, to se pokaže u samom postupku.

Primjer 38 *a) Riješimo Gaussovim postupkom nemogući sustav*

$$\begin{aligned} -x+y &= 1 \\ -x+y &= 5. \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{array}\right)_{:(-1)} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{array}\right)_{I+II} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

U drugom retku smo dobili izraz $0x+0y=4$*, odnosno* $0=4$ *što nije istina. Sustav je nemoguć.*

b) Slično se događa u slučaju kad je sustav neodređen:

$$\begin{aligned} -x+y &= 1 \\ -2x+2y &= 2. \end{aligned}$$

Sada imamo:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{array}\right)_{:(-1)} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{array}\right)_{2I+II} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Jedna jednadžba sustava je dokinuta. Ostala je jednadžba $x-y=-1$*. Zadani sustav jednadžbi ima beskonačno puno rješenja. Rješenje je zadano parametarski: uzmemo li* x *po volji, onda je* $y=x+1$*. Dakle, skup rješenja sustava je* $\{(x,x+1) : x \in \mathbf{R}\}$*.*

Primjer 39 *Odredimo rješenje sustava od tri jednadžbe s tri nepoznanice*

$$\begin{aligned} x+y+z &= 2 \\ 2x+3y+5z &= 6 \\ x-2y &= 0. \end{aligned}$$

Sastavimo proširenu matricu i transformiramo je:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2I+II \\ -I+III \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -II+I \\ 3II+III \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \end{array}\right)_{:8} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2III+I \\ -3III+II \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Rješenje sustava je $x=1, y=\frac{1}{2}, z=\frac{1}{2}$*.*

Inverzna matrica i rješavanje sustava linearnih jednadžbi

Spomenuli smo da svaki sustav linearnih jednadžbi možemo zapisati u matričnom obliku
$$Ax = b,$$
gdje je A matrica sustava, a b je vektor-stupac slobodnih koeficijenata. Ukoliko je matrica A kvadratna i regularna matrica, x možemo odrediti rješavanjem matrične jednadžbe $Ax = b$. Jednadžbu $Ax = b$ pomnožimo slijeva inverzom matrice A i dobivamo
$$A^{-1}Ax = A^{-1}b,$$
odnosno
$$x = A^{-1}b.$$
Vidimo da vektor rješenja sustava dobijemo kao umnožak inverza matrice sustava i matrice slobodnih koeficijenata.

Odakle uopće potreba za znanjem rješavanja sustava linearnih jednadžbi? Sustav linearnih jednadžbi je matematički model za mnoštvo realnih problema. Evo primjera.

Primjer 40 *Službenik u banci ima pred sobom svežanj od* 70 *novčanica u apoenima od* 5, 10 *i* 20 *kn. Znamo da novčanica od* 5 *kn ima tri puta više od onih od* 10 *kn i da je ukupni iznos vrijednosti svih* 70 *novčanica* 960 *kn. Koliko je novčanica pojedine vrste u svežnju?*

Označimo s

- x *- broj novčanica od* 5 *kn,*
- y *- broj novčanica od* 10 *kn,*
- z *- broj novčanica od* 20 *kn.*

Znamo da je sveukupno 70 *novčanica, dakle* $x + y + z = 70$*. Dalje, novčanica od* 5 *kn je tri puta više od onih od* 10 *kn, tj.* $x = 3y$*. Na kraju, iznos vrijednosti svih novčanica je* 960 *kn, znači* $5x + 10y + 20z = 960$*. Imamo sustav*
$$\begin{aligned} x + y + z &= 70 \\ x - 3y &= 0 \\ 5x + 10y + 20z &= 960. \end{aligned}$$
Rješenje sustava je $x = 24$, $y = 8$, $z = 38$ *tj. vektor* $\begin{pmatrix} 24 \\ 8 \\ 38 \end{pmatrix}$.

2.4 Linearna regresija

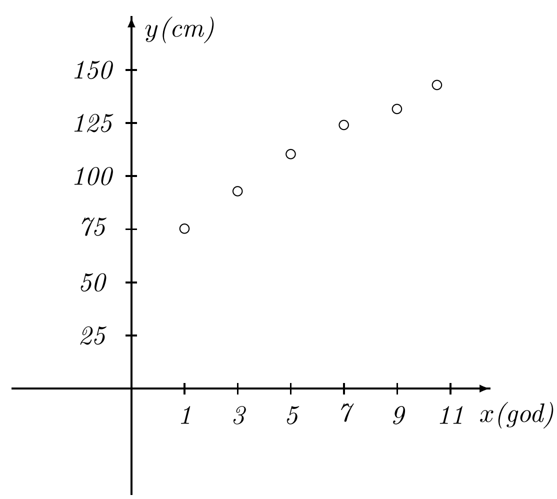
2.4.1 Regresijski pravac

Primjer 41 *Mjerenjem visine djece različitih uzrasta dobiveni su sljedeći podatci:*

uzrast (god)	*1*	*3*	*5*	*7*	*9*	*11*
visina (cm)	*75*	*92*	*108*	*121*	*130*	*140*

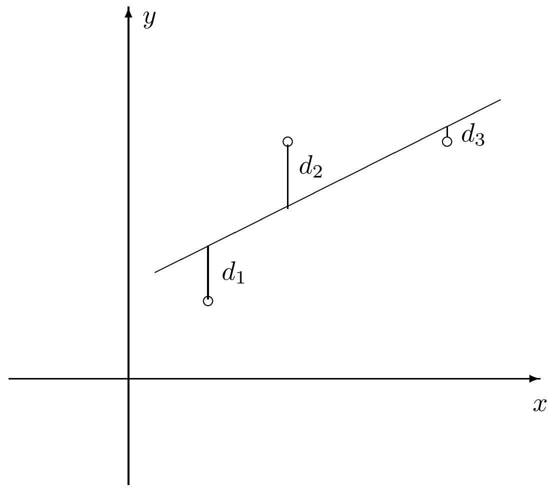
Nacrtajmo podatke kao točke koordinatnog sustava.

Uzrast djeteta je nezavisna varijabla. Visinu djeteta smatramo zavisnom varijablom jer ona ovisi o uzrastu djeteta. Dakle, kod crtanja uzrast nanesemo na x-os, a visinu na y-os koordinatnog sustava:



Iz smještaja točaka u koordinatnom sustavu primjećujemo linearan trend ovisnosti visine djeteta o njegovom uzrastu. Međutim, prave linearne ovisnosti visine o uzrastu nemamo, odnosno ne postoji pravac koji prolazi kroz sve zadane točke. Želimo, stoga, odrediti pravac koji "najbolje" prolazi pokraj svih točaka. Kriterij odabiranja tog pravca jest metoda najmanjih kvadrata. Želimo odrediti pravac sa svojstvom da je suma kvadrata odstupanja točaka od pravca u smjeru y-osi minimalna moguća.

Za ilustraciju metode najmanjih kvadrata uzmimo da su u koordinatnom sustavu zadane tri točke.



Želimo odrediti pravac za koji vrijedi da je ${d_1}^2 + {d_2}^2 + {d_3}^2$ najmanjeg mogućeg iznosa. Taj pravac nazivamo **regresijski pravac** i kažemo da je on optimalan u smislu metode najmanjih kvadrata. Kad odredimo jednadžbu regresijskog pravca, iz nje izvodimo i zaključke o vrijednostima zavisne varijable i za one vrijednosti nezavisne varijable koje podatci ne obuhvaćaju. U prethodnom primjeru, primjerice, o visini djeteta starog 10 godina.

Nalaženje regresijskog pravca

Neka je dano n vrijednosti nezavisne varijable: $x_1, \ldots, x_n$ i pripadne vrijednosti zavisne varijable: $y_1, \ldots, y_n$. Pretpostavljamo da svaka od n vrijednosti zavisne varijable približno linearno ovisi o odgovarajućoj vrijednosti nezavisne varijable. Tražimo jednadžbu **regresijskog pravca** koji optimalno (u smislu metode najmanjih kvadrata) opisuje tu linearnu ovisnost. Točnije tražimo nepoznate koeficijente β_0 i β_1 u jednadžbi $\tilde{y} = \beta_0 + \beta_1 x$ regresijskog pravca. Imamo n jednadžbi, odnosno elemenata tzv. **modelne funkcije**:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , \ i = 1, \ldots, n.$$

Tu su: x_i i-to opažanje nezavisne varijable, y_i i-to opažanje zavisne varijable, β_0 nepoznati odsječak regresijskog pravca na y-osi, β_1 nepoznati koeficijent smjera regresijskog pravca, te ε_i slučajna "greška" i-tog opažanja. Iznosi ε_i jesu upravo eličine odstupanja točaka od regresijskog pravca u smjeru y-osi. Svih n jednadžbi modelne funkcije možemo zapisati u obliku matrične jednadžbe

$$y = X\beta + \varepsilon$$

pri čemu je

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

Matricu X zovemo **matrica dizajna**. O izgledu elemenata u matrici dizajna odlučujemo prema modelnoj funkciji. U prvom stupcu matrice X stoje jedinice, a u drugom opažene vrijednosti nezavisne varijable. Zašto? U umnošku $X\beta$ retke matrice X množimo sa stupcima matrice β i trebamo dobiti $\beta_0 + \beta_1 x_i$, kako stoji u modelnoj funkciji. Zbilja,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

Rješenje β matrične jednadžbe $y = X\beta + \varepsilon$ tražimo prema metodi najmanjih kvadrata. Dakle, tražimo takve β_0, β_1 da duljina vektora greške,

$$\|\varepsilon\| = \sqrt{{\varepsilon_1}^2 + {\varepsilon_2}^2 + \cdots + {\varepsilon_n}^2}$$

bude minimalna moguća. Pokazuje se da vektor β dobivamo rješavanjem **normalne jednadžbe**:

$$(X^T X)\beta = X^T y.$$

Čim je matrica X ranga 2, postoji inverz matrice $X^T X$. To je slučaj čim među elementima $x_1, \dots, x_n$ imamo barem dva različita.

Raspišimo $X^T X$ i $X^T y$:

$$X^T X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n {x_i}^2 \end{pmatrix},$$

$$X^T y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{pmatrix}.$$

Dakle, da dobijemo koeficijente β_0, β_1, rješavamo jednadžbu

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n {x_i}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{pmatrix}.$$

....

Upravo opisan postupak nalaženja regresijskog pravca moguće je u potpunosti definirati tek nakon uvođenja pojma funkcije dviju varijabli i znanja određivanja njezinog ekstrema. U primjeru 101 egzaktno je riješen jedan problem određivanja jednadžbe regresijskog pravca. Ovdje metodu opisujemo bez preciznog objašnjenja budući je tretiramo kao jednu od primjena matričnog računa.

. . . .

Primjer 42 *Odredimo regresijski pravac za podatke o visinama djece određenog uzrasta iz prethodnog primjera.*

Već smo odlučili da je uzrast nezavisna varijabla, a visina zavisna varijabla. Imamo

$$y = \begin{pmatrix} 75 \\ 92 \\ 108 \\ 121 \\ 130 \\ 140 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \\ 1 & 7 \\ 1 & 9 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Matrica X je ranga 2. Trebamo izračunati elemente matrica X^TX i X^Ty. Pogodno je u tu svrhu sastaviti tablicu:

x_i	y_i	x_iy_i	${x_i}^2$
1	75	75	1
3	92	276	9
5	108	540	25
7	121	847	49
9	130	1170	81
11	140	1540	121
36	666	4448	286

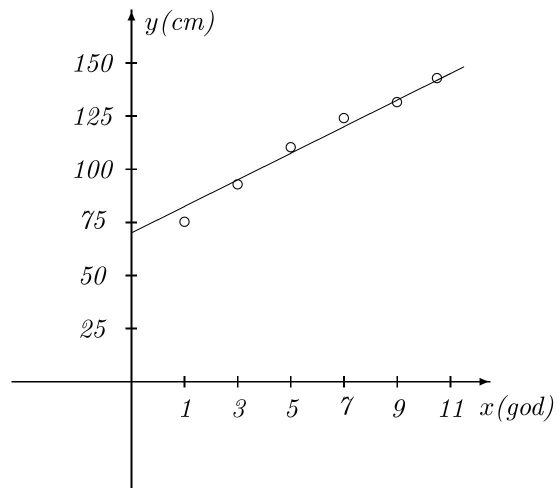
U zadnjem retku tablice je zbroj svih elemenata iz stupca. Trebamo riješiti normalnu jednadžbu

$$\begin{pmatrix} 6 & 36 \\ 36 & 286 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 666 \\ 4448 \end{pmatrix}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6 & 36 \\ 36 & 286 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 666 \\ 4448 \end{pmatrix} = \frac{1}{6 \cdot 286 - 36^2} \begin{pmatrix} 286 & -36 \\ -36 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 666 \\ 4448 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{420} \begin{pmatrix} 30 & 348 \\ 2 & 712 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72.257 \\ 6.457 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

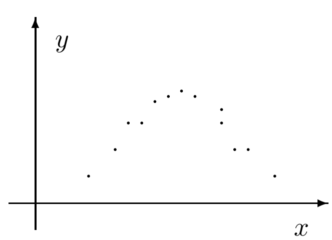
Jednadžba regresijskog pravca glasi $\tilde{y} = 72.257 + 6.457x$. Na slici je nacrtan regresijski pravac:

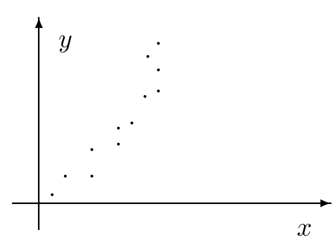


Iz jednadžbe regresijskog pravca možemo procijeniti visinu 10*-godišnjeg djeteta: za* $x = 10$ *je* $\tilde{y} \approx 72.257 + 6.457 \cdot 10 = 136.827$ *cm.*

. . . .

Položaj (jednadžba) regresijskog pravca bitno ovisi o podatcima iz kojih ga računamo. Uklanjanjem ili dodavanjem opažaja kao i njihovom kvantitativnom promjenom mijenja se i položaj (jednadžba) regresijskog pravca. Svođenje podataka na pravac nije uvijek moguće. Zavisna varijabla ne mora uvijek o nezavisnoj ovisiti približno linearno. Nacrtamo li dane podatke kao točke u koordinatnom sustavu, dobivamo tzv. dijagram raspršenja. Oblik dijagrama raspršenja sugerira svojim oblikom na koju vrstu funkcije treba svoditi podatke. U primjeru na prvoj slici vidimo da dijagram raspršenja sugerira svođenje na na parabolu, a na drugoj na neku od potencija:





. . . .

2.5 Analiza ulaza i izlaza

Analiza ulaza i izlaza (input-output analiza) je primjer primjene teorije matrica u ekonomiji. Nastala je 1936. godine. Tvorac joj je Wassily Leontief. Model proučava pojednostavljenu ekonomiju neke zemlje koju čini više grana (sektora) te je cilj uspostaviti kvantitativne relacije među tim granama da tijek proizvodnje bude nesmetan. Odnose proizvodnje i potrošnje među granama privrede modeliramo kvadratnom matricom. Ovdje su:

- ulaz (input) - ono što u privrednu granu ulazi (sredstva proizvodnje, rad)
- izlaz (output) - ono što izlazi iz privredne grane (proizvod, usluga).

Opišimo model. Neka je čitavo gospodarstvo podijeljeno na n grana. Označimo izlaz i. grane s X_i. Dio izlaza i. grane može služiti kao ulaz za proizvodnju u nekoj od ostalih grana. Označimo s X_{ij} dio izlaza i. grane koji služi kao ulaz za j. granu proizvodnje. Na kraju, označimo s x_i tzv. finalnu potražnju i. grane, tj. dio izlaza i. grane koji se ne koristi kao ulaz u drugim granama proizvodnje niti se upotrebljava tamo gdje je stvoren. Iz navedenih podataka sastavlja se **tabela ulaza-izlaza (input-output tabela)**

X_i		X_{ij}		x_i
X_1	X_{11}	$\cdots$	X_{1n}	x_1
X_2	X_{21}	$\cdots$	X_{2n}	x_2
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
X_n	X_{n1}	$\cdots$	X_{nn}	x_n

Matrica

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

zove se **matrica proizvodnje** ili **matrica ukupnih izlaza**. Ona govori kolika je ukupna proizvodnja gospodarskih grana koje razmatramo.

Matrica

$$D = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

je **matrica finalne potražnje**.

Matrica

$$B = \begin{pmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & \cdots & X_{nn} \end{pmatrix}$$

zove se **matrica ulaza-izlaza**.

Budući je pojedini element matrice proizvodnje X jednak sumi svih elemenata matrice ulaza-izlaza koji su u istom retku i elementa matrice finalne potražnje iz istog retka, imamo:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} + x_i.$$

Uvodimo **tehničke koeficijente**

$$a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j},$$

koji opisuju udio i. grane u jedinici proizvoda j. grane. Od njih sastavimo **matricu tehničkih koeficijenata**

$$A = (a_{ij}).$$

Uočimo da je $0 \leq X_{ij} \leq X_j$, pa je $0 \leq a_{ij} \leq 1$ za sve i, j. Za svaki $i = 1, \ldots, n$ je

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = X_i - x_i,$$

pa vrijedi $AX = X - D$. Stoga matricu finalne potražnje računamo kao

$$D = X - AX.$$

Ukoliko imamo zadanu matricu tehničkih koeficijenata A, pojedini se elementi matrice ulaza-izlaza računaju po formuli

$$X_{ij} = a_{ij} X_j.$$

U praksi (računima) su obično poznate matrice A (ulaza-izlaza) i D (matrica finalne potražnje), a traži se matrica ukupnih izlaza X. Kako je dobiti? Kako je $D = X - AX$, možemo pisati $D = IX - AX$ za jediničnu matricu I odgovarajućeg reda. Sad izlučimo zajednički faktor, matricu X zdesna (izlučujemo zdesna jer množenje matrica nije komutativno!)

$$D = (I - A) \cdot X.$$

Matrica $I - A$ ima posebno ime, zove se **matrica tehnologije** i označava se slovom T. Da dobijemo X, pomnožimo jednakost slijeva s T^{-1}. (To je moguće jedino ako je T regularna što jest slučaj u realnim primjenama.) Izlazi da je

$$X = T^{-1} \cdot D.$$

Dakle, matricu ukupnih izlaza dobivamo množenjem inverza matrice tehnologije s matricom finalne potražnje.

Primjer 43 *Ekonomija neke zemlje podijeljena je u tri grane. Dana je tabela ulaza-izlaza:*

X_i	X_{ij}			x_i
100	0	30	0	
60	20	0	20	
80	30	30	0	

Dopunimo tabelu matricom finalne potražnje D, odredimo matricu tehničkih koeficijenata A i matricu tehnologije T.

Elementi matrice D jednaki su razlici elementa matrice proizvodnje i zbroja elemenata matrice ulaza-izlaza iz istog retka. Tako je $x_1 = 100 - 30$, $x_2 = 60 - (20 + 20) = 20$, $x_3 = 80 - (30 + 30) = 20$. Dakle,

$$D = \begin{pmatrix} 70 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Elementi matrice tehničkih koeficijenata jesu $a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j}$. Znači:

$$a_{11} = \frac{X_{11}}{X_1} = \frac{0}{100} = 0, a_{21} = \frac{X_{21}}{X_1} = \frac{20}{100} = 0.2, a_{31} = \frac{X_{31}}{X_1} = \frac{30}{100} = 0.3.$$

Vidimo da elemente prvog stupca matrice tehničkih koeficijenata dobivamo dijeljenjem elemenata prvog stupca matrice ulaza-izlaza elementom prvog retka matrice proizvodnje, ... Dobivamo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.25 \\ 0.3 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrica tehnologije lako se računa iz matrice tehničkih koeficijenata:

$$T = I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.25 \\ 0.3 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0 \\ -0.2 & 1 & -0.25 \\ -0.3 & -0.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Primjer 44 *Sastavimo tabelu ulaza-izlaza ako je za gospodarstvo podijeljeno u tri grane zadana matrica tehničkih koeficijenata*

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.25 & 0 \\ 0.2 & 0.25 & 0.5 \\ 0.4 & 0.25 & 0.2 \end{pmatrix}$$

i matrica proizvodnje (ukupnih izlaza)

$$X = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 120 \end{pmatrix}.$$

Slučaj je sad obratan nego u prethodnom primjeru. Sada su zadani tehnički koeficijenti a_{ij}. Preko njih i elemenata matrice proizvodnje moramo dobiti elemente matrice ulaza-izlaza. Znamo da je $a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j}$ pa je $X_{ij} = a_{ij}X_j$. Znači

$$X_{11} = a_{11}X_1 = 0.2 \cdot 100 = 20, X_{21} = a_{21}X_1 = 0.2 \cdot 100 = 20, X_{31} = a_{31}X_1 = 40.$$

(Elemente prvog stupca matrice ulaza-izlaza dobivamo množenjem odgovarajućih elemenata matrice tehničkih koeficijenata s X_1). Slično izračunamo i elemente preostalih dvaju stupaca matrice ulaza-izlaza. Elemente matrice finalne potražnje odredimo kao razliku elementa matrice proizvodnje i zbroja svih elemenata matrice ulaza-izlaza navedenih u tom retku. Dobivamo

X_i	X_{ij}			x_i
100	20	50	0	30
200	20	50	60	70
120	40	50	24	6

Primjer 45 *Zadana je tabela ulaza-izlaza neke ekonomije s tri grane*

X_i	X_{ij}			x_i
	30	40	10	20
	20	40	0	140
	30	50	60	40

Prvi stupac ćemo lako popuniti: element matrice proizvodnje jednak je sumi svih elemenata u retku, stoga je matrica proizvodnje

$$X = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 180 \end{pmatrix}.$$

Neka se planiraju novi iznosi ukupne proizvodnje grana:

$$X = \begin{pmatrix} 150 \\ 300 \\ 270 \end{pmatrix}.$$

Sastavimo novu tabelu ulaza-izlaza ako se tehnološki uvjeti ne mijenjaju.

Formulacija "tehnološki uvjeti se ne mijenjaju" znači da matrica tehničkih koeficijenata ostaje ista. Odredimo je iz stare tabele ulaza-izlaza

X_i	X_{ij}			x_i
100	30	40	10	20
200	20	40	0	140
180	30	50	60	40

Znamo da elemente 1. *stupca matrice tehničkih koeficijenata dobivamo dijeljenjem elemenata* 1. *stupca matrice ulaza-izlaza elementom* X_1*, a slično odredimo i ostale elemente matrice tehničkih koeficijenata. Dobivamo*

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5555 \\ 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0.3 & 0.25 & 0.3333 \end{pmatrix}.$$

Na temelju nove matrice proizvodnje X *i upravo dobivene matrice tehničkih koeficijenata* A*, određujemo novu matricu ulaza-izlaza. Elemente njezinog* 1. *stupca dobivamo množenjem elemenata* 1. *stupca matrice tehničkih koeficijenata elementom* $X_1 = 150$ *nove matrice proizvodnje, i slično dalje. Dobivamo matricu ulaza-izlaza i matricu linalne potražnje. Nova tabela ulaza-izlaza je:*

X_i	X_{ij}			x_i
150	45	60	15	30
300	30	60	0	210
270	45	75	90	60

2.6 Elementi linearnog programiranja

Što je problem linearnog programiranja? Naći optimalno rješenje (ono koje maksimizira ili minimizira neku veličinu od interesa) matematičkog modela realnog životnog problema. Na primjer, investitor želi uložiti sredstva u onu investiciju koja će mu donijeti maksimalnu dobit (cilj) bez velikog rizika (ograničenje). Ili, nutricionist sastavlja dijetu tako da broj kalorija bude minimalan (cilj), ali da budu zadovoljeni svi prehrambeni zahtjevi (ograničenje). U svakom problemu imamo cilj i ograničenja. Problem zovemo linearnim jer su cilj i ograničenja zadani linearnom funkcijom, odnosno sustavom linearnih nejednadžbi.

Primjer 46 *Proizvođač proizvodi dva tipa goriva: regular (R) i super (S). Sirovina u proizvodnji prolazi dva procesa: preradu i pročišćavanje. Za dobivanje jedne jedinice goriva tipa R prerada traje* 0.2 *sata, pročišćavanje* 0.5 *h. Za dobivanje jedne jedinice goriva tipa S prerada traje* 0.4 *sata, a pročišćavanje* 0.2 *h. Pogoni prerade i pročišćavanja rade svaki po* 8 *h dnevno. Zarada proizvođača po prodanoj jedinici goriva tipa R je* 3 *kn, a po jedinici goriva tipa S* 5 *kn. Koliku količinu pojedinog goriva treba proizvođač dnevno proizvesti da mu zarada bude maksimalna?*

Označimo s
- x_1 *količinu (u jedinicama) dnevne proizvodnje goriva tipa R,*
- x_2 *količinu (u jedinicama) dnevne proizvodnje goriva tipa S.*
Cilj je proizvođača maksimalna zarada. Treba maksimizirati **funkciju cilja** $z = 3x + 5y$*. Međutim proces proizvodnje nameće* **ograničenja***:*
a) imamo ograničenje na proces prerade; on ne može dnevno biti dulji od 8 *sati. Dakle,*

imamo nejednadžbu $0.2x + 0.4y \leq 8$,
b) postoji ograničenje na proces pročišćavanja; imamo nejednadžbu $0.5x + 0.2y \leq 8$.
Još valja primijetiti da mora biti i $x \geq 0, y \geq 0$ *budući su količine proizvodnje nenegativni brojevi. Zadan je problem linearnog programiranja:*

$$\begin{aligned} 3x + 5y \quad &\rightarrow \quad max, \\ &\quad\; 0.2x + 0.4y \leq 8 \\ &\quad\; 0.5x + 0.2y \geq 8 \\ &\quad\; x \geq 0, y \geq 0. \end{aligned}$$

Definicija 14 *Neka je zadan problem linearnog programiranja: optimizirati linearnu funkciju cilja uz skup ograničenja (sustav linearnih nejednadžbi). Problem linearnog programiranja je* **moguć (konzistentan)** *ako postoji barem jedan vektor koji zadovoljava skup ograničenja. Svi takvi vektori čine* **skup mogućih rješenja** *problema linearnog programiranja. Moguće rješenje koje ujedno optimizira funkciju cilja zove se* **optimalno rješenje**.

. . . .

Problem linearnog programiranja je nalaženje optimalnog rješenja nekog realnog životnog problema. Govorimo o programiranju zato što optimalno rješenje određuje (programira) obrazac po kome se odvija problemom razmatrana aktivnost. Linearno se programira npr. transport (red letenja aviona, dostava robe), industrijska i poljoprivredna proizvodnja, trgovina. U određivanje rješenja ulaze mnogi faktori. Skup ograničenja čine golemi sustavi linearnih nejednadžbi koji se rješavaju algebarskim metodama uz pomoć računala. Mi ćemo promotriti tek osnove metode grafičkog rješavanja problema linearnog programiranja. Problemi linearnog programiranja ovdje su mali (s dvije varijable odlučivanja) i rješavat ćemo ih grafički.

. . . .

2.6.1 Grafičko rješavanje sustava linearnih nejednadžbi

Neka imamo zadan sustav od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x - y &= 6. \end{aligned}$$

Njegovo je rješenje uređeni par $(4, -2)$. Grafički bismo sustav riješili tako da u istom koordinatnom sustavu nacrtamo pravce određene jednadžbama i odredimo koordinate točke u kojoj se oni sijeku.

Neka je zadan sustav od dvije **nejednadžbe** s dvije nepoznanice.

$$\begin{aligned} x + y &\geq 2 \\ x - y &\leq 6. \end{aligned}$$

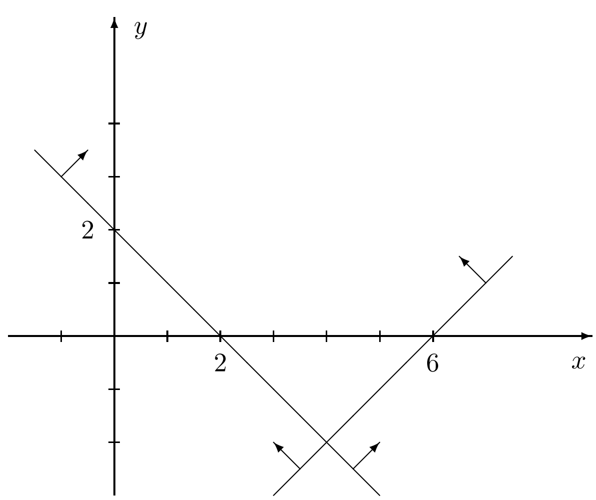
Kako grafički odrediti njegovo rješenje?

Za početak pretvorimo svaku od nejednadžbi u jednadžbu i pogledajmo koji su pravci njima određeni. Odredimo po dvije točke potrebne za crtanje pravaca:

$$x + y = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 2 - x \quad , \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 2 \\ \hline y & 2 & 0 \end{array}$$

$$x - y = 6 \quad \Rightarrow \quad y = x - 6 \quad , \quad \begin{array}{c|c|c} x & 6 & 4 \\ \hline y & 0 & -2 \end{array}$$

Znamo da pravcu pripadaju točke čije koordinate zadovoljavaju jednakost kojom je zadana jednadžba pravca. Svaki pravac dijeli ravninu na dvije poluravnine. Točke koje zadovoljavaju nejednakost leže u jednoj od dviju poluravnina. U kojoj? To se može odrediti uvrštavanjem koordinata neke konkretne točke iz jedne od poluravnina. Ako koordinate te odabrane točke uvrštene u nejednadžbu daju točnu nejednakost, nejednadžba opisuje poluravninu iz koje smo uzeli točku. Ako ne, nejednakost vrijedi za sve točke iz druge poluravnine. U konkretnom slučaju: koju poluravninu određuje nejednadžba $x + y \geq 2$? Odaberimo npr. točku $(0, 0)$. Uvrstimo li njene koordinate u nejednadžbu, dobivamo $0 + 0 \geq 2$. Tvrdnja je lažna. Dakle, nejednadžbom $x + y \geq 2$ određena je poluravnina kojoj ishodište ne pripada. Nejednadžbom $x+y \geq 2$ određena je poluravnina "iznad" pravca $x + y = 2$. Slično bismo provjerili da nejednadžba $x - y \leq 6$ određuje poluravninu koja sadrži ishodište. Kako moraju biti zadovoljene obje nejednadžbe, rješenje sustava jest presjek dobivenih poluravnina. Nacrtajmo rješenje u koordinatnom sustavu (strjelicama označavamo poluravninu određenu nejednakošću).



Primjer 47 *Riješimo grafički sustav linearnih nejednadžbi:*

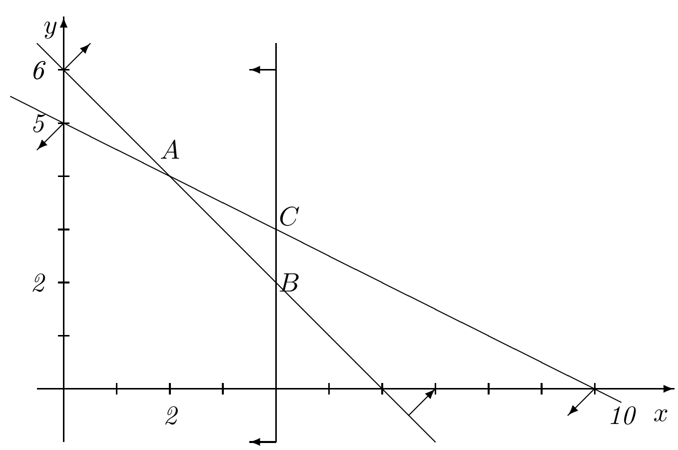
$$\begin{aligned} x+2y &\leq 10 \\ x+y &\geq 6 \\ x &\leq 4. \end{aligned}$$

Pretvorimo nejednadžbe u jednadžbe i odredimo točke za crtanje pravaca:

$$x+2y=10 \quad \Rightarrow \quad y=5-\tfrac{1}{2}x \quad , \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 4 \\ \hline y & 5 & 3 \end{array}$$

$$x+y=6 \quad \Rightarrow \quad y=6-x \quad , \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 4 \\ \hline y & 6 & 2 \end{array}$$

Treći pravac kojeg crtamo je $x=4$. Sada odredimo poluravnine koje su određene nejednadžbama. Za konkretnu točku uzmemo ishodište. Uvrštavanjem $(0,0)$ u nejednadžbe vidimo da ishodište jest u poluravnini koju određuju nejednakosti $x+2y \leq 10$ i $x \leq 4$. Nejednakost $x+y \geq 6$ određuje poluravninu u kojoj ne leži ishodište. Rješenje danog sustava linearnih nejednadžbi jest presjek svih triju dobivenih poluravnina. Skicirajmo:



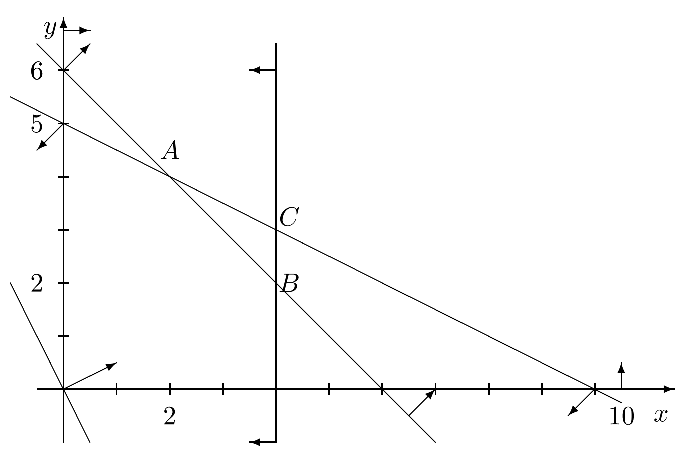
Rješenje sustava nejednadžbi je trokut ABC.

2.6.2 Grafičko rješavanje problema linearnog programiranja

Kad znamo grafički riješiti sustav linearnih nejednadžbi, na korak smo od mogućnosti grafičkog rješavanja problema linearnog programiranja.
Zadajmo problem linearnog programiranja. Želimo maksimizirati funkciju cilja $z = 2x + y$. Neka skup ograničenja čini sustav nejednadžbi iz prethodnog primjera kome su dodani uvjeti nenegativnosti: $x \geq 0$, $y \geq 0$. Uvjeti nenegativnosti se dodaju zato što su u realnim problemima veličine koje modeliramo prirodno nenegativne. Neka svih 5 nejednakosti određuje skup ograničenja O.
Dobiveni problem linearnog programiranja glasi:

$$\begin{aligned} 2x + y \quad &\rightarrow \quad max, \\ & x + 2y \leq 10 \\ & 5 + y \geq 6 \\ & x \leq 4 \\ & x \geq 0, y \geq 0. \end{aligned}$$

Prvo grafički određujemo skup mogućih rješenja problema linearnog programiranja. Dakle, grafički rješavamo sustav linearnih nejednažbi zadanih skupom ograničenja. Skup mogućih rješenja je $\triangle ABC$ kao u prethodnom primjeru. Naime, dodani uvjeti nenegativnosti određuju prvi kvadrant i ne mijenjaju skup mogućih rješenja. Uvjeti određuju pravce, tzv. **rubne pravce** koji omeđuju **skup mogućih rješenja**. Općenito skup mogućih rješenja ne mora biti omeđen dio ravnine, a može biti čak i prazan. Presjeke rubnih pravaca skupa rješenja zovemo **vrhovima skupa mogućih rješenja**. Kod nas su to točke: $A(2,4)$, $B(4,2)$ i $C(4,3)$. Kad imamo skup mogućih rješenja problema linearnog programiranja, tražimo optimalno rješenje. Izraz kojim je zadana funkcija cilja pretvorimo u jednadžbu pravca koji prolazi ishodištem koordinatnog sustava: $2x + y = 0$. Taj pravac zove se **izoprofitna linija**. Ucrtajmo ga u koordinatni sustav:



Da bismo odredili optimalno rješenje, moramo odrediti maksimalnu vrijednost izraza $2x + y$ na skupu mogućih rješenja. Geometrijski to se radi ovako: zamišljamo paralelno pomicanje izoprofitne linije preko skupa mogućih rješenja. Tražimo onu točku skupa mogućih rješenja kroz koju će izoprofitna linija pri tom pomicanju zadnju proći. Vidimo da je to točka $C(4, 3)$. Ona je optimalno rješenje.

Slično se radi kad tražimo minimum funkcije cilja na skupu mogućih rješenja. U tom slučaju graf funkcije cilja zovemo **izotroškovna linija**. Kod određivanja minimuma, tražimo onu točku skupa mogućih rješenja kroz koju pri paralelnom pomicanju izotroškovna linija prvu prođe.

Uvijek se optimalno rješenje problema linearnog programiranja postiže u jednom ili više vrhova skupa mogućih rješenja.

Teorem 4 *Ako je skup mogućih rješenja sustava linearnih nejednadžbi koje su ograničenja problema linearnog programiranja omeđen, optimalno rješenje postoji i ostvaruje se u jednom ili više vrhova skupa mogućih rješenja. Ako je skup mogućih rješenja neomeđen, optimalno rješenje ne mora postojati. Ako ipak postoji, opet se postiže u jednom ili više vrhova skupa mogućih rješenja.*

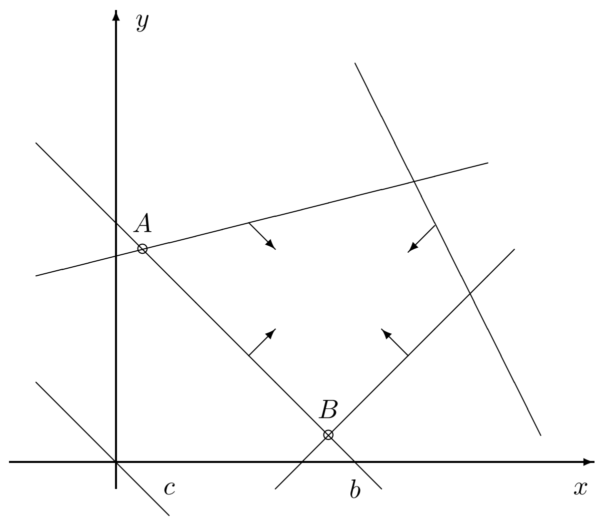
U našem primjeru funkcija cilja $z = 2x + y$ postiže maksimum u vrhu $C(4, 3)$. Vidjeli smo to geometrijski. Prema teoremu znamo da se optimalno rješenje postiže u vrhu skupa mogućih rješenja. Stoga možemo algebarski (računom) odrediti vrijednosti funkcije cilja u vrhovima skupa mogućih rješenja:

(x, y)	$(4, 2)$	$(2, 4)$	$(4, 3)$
$2x + y$	10	8	11

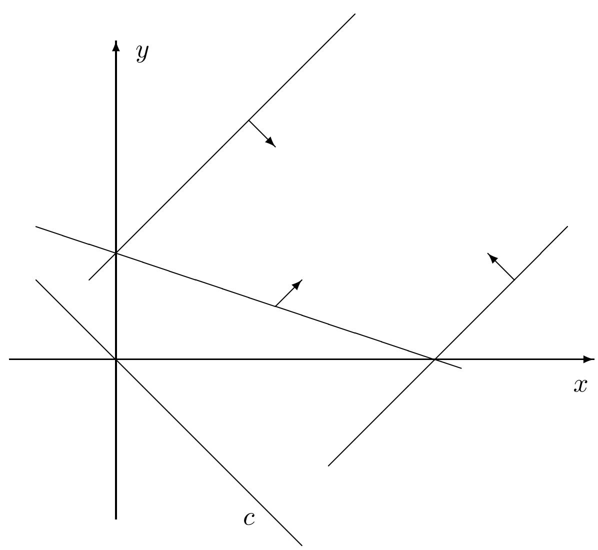
Vidimo da se najveća vrijednost poprima u točki $(4, 3)$.

. . . .

- Kako je moguće da se optimalno rješenje postiže u više vrhova skupa mogućih rješenja? To se može dogoditi kada je izoprofitna (izotroškovna) linija paralelna nekom od pravaca koji su rubni pravci skupa mogućih rješenja (na slici je $c \| b$). Ukoliko je postavljen problem nalaženja minimuma funkcije cilja čija je izotroškovna linija c, optimalno rješenje je svaka točka dužine AB.



- Skup mogućih rješenja problema linearnog programiranja može biti neomeđen:



Ako je c izoprofitna linija, vidimo da ona na skupu mogućih rješenja maksimum poprima u beskonačnosti, pa rješenja nema. Poprima li izotroškovna linija optimum?

. . . .

Postupak grafičkog rješavanja problema linearnog programiranja

U grafičkom rješavanju problema linearnog programiranja se udomaćio postupak rješavanja koji nije sasvim grafički. Naime, kad se grafički dobije skup mogućih rješenja i odrede njegovi vrhovi, onda se algebarski računa vrijednost funkcije cilja u svakom pojedinom vrhu. Vrh u kome je vrijednost funkcije cilja optimalna je optimalno rješenje. Unatoč tome što optimalno rješenje ne dobivamo pomicanjem grafa funkcije cilja, ovdje opisanu metodu zvat ćemo grafičkom.

Postupak grafičkog rješavanja problema linearnog programiranja provodimo kako slijedi:

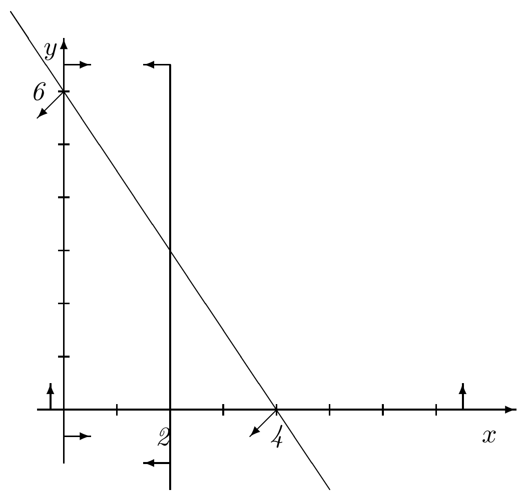
1. Iz zadanog problema definiramo funkciju cilja i skup ograničenja (uvjete).
2. Na temelju uvjeta određujemo grafički skup mogućih rješenja.
3. Odredimo koordinate točaka koje su vrhovi skupa mogućih rješenja.
4. Algebarski odredimo vrijednosti funkcije cilja u svakom od vrhova skupa mogućih rješenja.
5. Ako je skup mogućih rješenja ograničen, optimalno rješenje su oni vrhovi skupa mogućih rješenja u kojima je vrijednost funkcije cilja optimalna (minimalna ili maksimalna). Ako je skup mogućih rješenja neograničen, zamišljenim pomicanjem izoprofitne ili izotroškovne linije provjerimo da li optimalno rješenje postoji. Ako postoji, optimalno rješenje su oni vrhovi u kojima je vrijednost funkcije cilja optimalna.

Primjer 48 *Na dva stroja I i II proizvode se dva tipa proizvoda: A i B. Izrada proizvoda A zahtijeva* 3 *h obrade na stroju I i* 5 *h obrade na stroju II. Izrada proizvoda B zahtijeva samo* 2 *h obrade na stroju I. Kapacitet stroja I je* 12 *h rada dnevno, a stroja II* 10 *h rada dnevno. Jedinica proizvoda A donosi prihod od* 200 *kn, a jedinica proizvoda B* 100 *kn. Odredimo program opterećenja strojeva koji donosi maksimalni dnevni prihod.*

Označimo s x broj jedinica proizvoda A, s y broj jedinica proizvoda B. Dnevni prihod proizvodnje je $200x + 100y$. Tražimo da bude maksimalan. Koja su graničenja u prozvodnji? 3 *h obrade po jedinici proizvoda A i* 2 *h obrade po jedinici B na stroju I ne smiju u zbroju prelaziti kapacitet stroja od* 12 *radnih sati dnevno, tj. mora biti $3x + 2y \leq 12$. Slično, $5x \leq 10$. Dodajemo i uvjete nenegativnosti: $x \geq 0$, $y \geq 0$. Dobiven je problem linearnog programiranja:*

$$\begin{aligned} 200x + 100y \quad &\to \quad max \\ &3x + 2y \leq 12 \\ &5x \leq 10 \\ &x \geq 0, y \geq 0. \end{aligned}$$

Riješimo problem. Prvo grafički određujemo skup mogućih rješenja. U tu svrhu nacrtajmo u koordinatnom sustavu pravce $3x + 2y = 12$ i $x = 2$ ($5x = 10$). Odredimo poluravnine koje su određene nejednakostima.



Skup mogućih rješenja je omeđen. Vrhovi su mu: $(0,0), (2,0), (2,3)$ *i* $(0,6)$. *Pogledajmo u kojem se vrhu postiže maksimum funkcije cilja:*

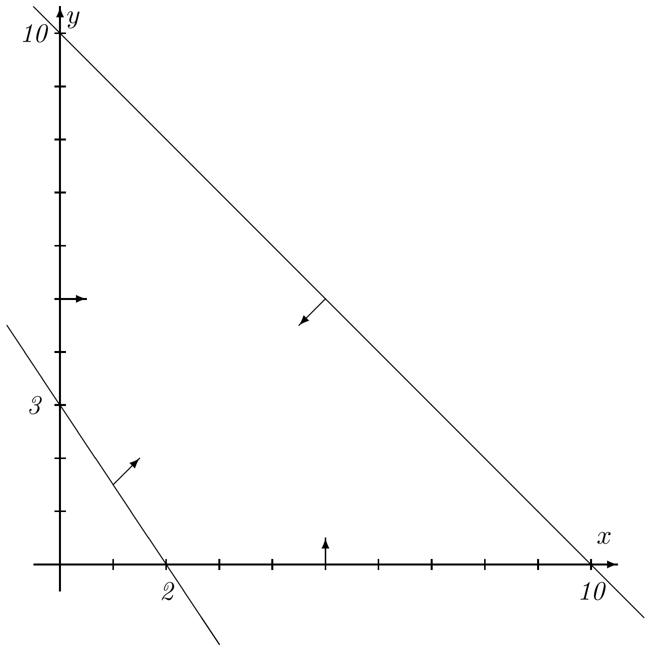
(x,y)	$(0,0)$	$(2,0)$	$(2,3)$	$(0,6)$
$200x + 100y$	*0*	*40000*	*70000*	*60000*

Vrh $(2,3)$ *je optimalno rješenje. Zaključujemo da je dnevni prihod proizvodnje maksimalan ako se dnevno proizvedu* 2 *proizvoda tipa* A *i* 3 *proizvoda tipa* B.

Primjer 49 *Riješimo grafički problem linearnog programiranja*

$$\begin{aligned} x + 2y \quad \rightarrow \quad & min \\ & x + y \leq 10 \\ & 3x + 2y \geq 6 \\ & x \geq 0, y \geq 0. \end{aligned}$$

Grafički određujemo skup mogućih rješenja: nacrtamo u koordinatnom sustavu pravce $x + y = 10$ *i* $3x + 2y = 6$ *te odredimo poluravnine koje su određene nejednakostima i njihov presjek u prvom kvadrantu:*



Dobiveni skup mogućih rješenja je omeđen. Vrhovi skupa mogućih rješenja jesu: $(2,0),(10,0),(0,10)$ *i* $(0,3)$. *Računamo li vrijednost* $x+2y$ *u svakoj od tih točaka, vidimo da je optimalno rješenje točka* $(2,0)$.

2.7 Zadatci

1. Odredite transponiranu matricu matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Odredite
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Zadane su matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Odredite AB i BA.

4. Odredite rang matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

5. Odredite determinantu matrice A iz prethodnog zadatka.

6. Odredite inverznu matricu zadanoj:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

7. Gaussovom metodom riješite zadani sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{array}{rrcl} 4x & +8y & = & 10 \\ 2x & +4y & = & 5. \end{array}$$

8. Riješite Gaussovom metodom sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 2 \\ 2x-y+z & = & 3 \\ -x+y+z & = & -4. \end{array}$$

9. Uprava tvrtke za proizvodnju elektroničke opreme ispituje povezanost godina iskustva radnika koji rade u pogonu sastavljanja CD player-a i broja dnevno sastavljenih CD player-a. Prikupljeni su podaci:

Iskustvo(god.)	5	11	15	7	2	10	9
Broj sast. CD	14	21	20	18	13	16	18

- Koja je varijabla nezavisna, koja zavisna?
- Ucrtajte podatke u koordinatni sustav i predvidite prolazak pravca regresije.
- Odredite jednadžbu pravca regresije.
- Procijenite koliko će u jednom danu CD-a sastaviti radnik koji ima 12 godina radnog iskustva.

10. Podatci u tablici zadaju iskustvo (u godinama rada) zaposlenika trgovine elektroničkim dijelovima i broj kompjutera koje je zaposlenik prodao u prvom tromjesečju godine:

godine iskustva	8	24	18	12	20	32	14
broj kompjutora	38	84	56	62	78	70	42

Odredite jednadžbu pravca regresije za dane podatke.

11. Odredite matricu ukupnih izlaza ekonomije ako je zadana matrica tehničkih koeficijenata $A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0.8 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$ i matrica finalne potražnje $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

12. Zadana je tabela ulaza-izlaza:

X_i	X_{ij}		x_i
	45	60	15
	90	30	60

a) dopunite je,
b) odredite matricu tehničkih koeficijenata A,
c) sastavite novu tabelu ulaza-izlaza ako se planira nova finalna potražnja $\begin{pmatrix} 20 \\ 80 \end{pmatrix}$.

13. Zadana je tabela ulaza-izlaza neke ekonomije s tri grane:

X_i	X_{ij}			x_i
	30	40	10	20
	20	40	0	140
	30	50	60	40

a) Dopunite tabelu.
b) Ako se planiraju novi ukupni izlazi $X = \begin{pmatrix} 150 \\ 300 \\ 270 \end{pmatrix}$, a tehnološki uvjeti se ne mijenjaju, sastavite novu tabelu ulaza-izlaza.

14. Postavite problem linearnog programiranja za slijedeći slučaj: Pekarnica pravi bijeli i žuti kolač . Svaki kg bijelog kolača zahtijeva 1/4 kg brašna i 1/4 kg šećera; svaki kg žutog kolača zahtijeva u pripremi 1/3 kg brašna i 1/3 kg šećera. Pekar na zalihama ima 100 kg brašna i 80 kg šećera. Ako se bijeli kolač prodaje po cijeni 30kn/kg, a žuti po cijeni od 25 kn/kg, koliko kg pojedinih kolača treba pekar proizvoditi da bi mu zarada bila maksimalna?

15. Riješite grafički sljedeći problem linearnog programiranja:

$$\begin{aligned} 5x - 8y \quad \rightarrow \quad & max \\ & x - 3y \geq -5 \\ & 2x + y \geq 4 \\ & x \geq 0, y \geq 0. \end{aligned}$$

Poglavlje 3

Elementarne funkcije

Podsjetimo se prvo definicije funkcije. Kažemo da je zadana funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathcal{K}$ ako su zadani neprazni skupovi $\mathcal{D}$ i $\mathcal{K}$ i ako znamo kako se svakom $x \in \mathcal{D}$ pridružuje točno jedan $y = f(x) \in \mathcal{K}$. Skup $\mathcal{D}$ je domena, a skup $\mathcal{K}$ kodomena funkcije f. Veličinu x je uobičajeno nazivati argumentom ili nezavisnom varijablom. y je zavisna varijabla jer njene vrijednosti ovise o vrijednostima varijable x.

Zanimaju nas funkcije koje opisuju ovisnosti kvantitativnih veličina. Stoga ćemo u daljem tekstu smatrati da su $\mathcal{D}$ i $\mathcal{K}$ podskupovi skupa realnih brojeva $\mathbf{R}$. Te funkcije zovemo realnim funkcijama realne varijable i tu radimo isključivo s takvim funkcijama.

Definicija 15 **Prirodnom domenom** *funkcije f zovemo maksimalan podskup od $\mathbf{R}$ takav da je vrijednost funkcije na njemu definirana. Prirodnu domenu funkcije f označavamo s $\mathcal{D}(f)$.*

Slika *funkcije f je skup*

$$\mathcal{R}(f) = \{f(x) : x \in \mathcal{D}(f)\} \subseteq \mathbf{R}.$$

Graf *funkcije f je skup*

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathcal{D}(f)\} \subseteq \mathbf{R}^2.$$

Funkcije se zorno prikazuju grafovima. Graf funkcije f sadrži sve točke ravnine (x, y) za koje je $y = f(x)$.

Definicija 16 *Neka je f realna funkcija definirana na nekom intervalu $I \subseteq \mathbf{R}$.*

*Kažemo da funkcija f **raste** na intervalu I ako za svake dvije vrijednosti $x_1, x_2 \in I$ za koje je $x_1 \leq x_2$, vrijedi i $f(x_1) \leq f(x_2)$. Funkcija f **strogo raste** na intervalu I ako za svake dvije vrijednosti $x_1, x_2 \in I$ za koje je $x_1 < x_2$, vrijedi i $f(x_1) < f(x_2)$. Ako je, za svaka dva $x_1, x_2 \in I$ takva da je $x_1 \leq x_2$, ujedno $f(x_1) \geq f(x_2)$, kažemo da funkcija f **pada** na intervalu I. Funkcija f **strogo pada** na intervalu I ako za $x_1, x_2 \in I$ takve da je $x_1 < x_2$ vrijedi $f(x_1) > f(x_2)$. Funkcija raste (pada) u točki $x_0 \in \mathbf{R}$ ako raste (pada) na nekom intervalu I koji sadrži točku x_0.*

3.1 Polinomi i racionalne funkcije

Za svaki realan broj x moguće je izračunati svaku njegovu potenciju s nenegativnim cjelobrojnim eksponentom k: x^k, $k \geq 0$. Za zadani $n \in \mathbf{N}$ i realne brojeve a_0, a_1, ..., a_n, **linearna kombinacija** potencija

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

tvori **polinom** $P(x)$. Vrijednost polinoma $P(x)$ može se izračunati konačnim brojem operacija zbrajanja i množenja za svaki realan broj x. Zato je svaki polinom definiran na cijelom skupu $\mathbf{R}$. Dijeljenjem polinoma izlazimo iz te klase funkcija, slično kao što dijeljenjem prirodnih (ili cijelih) brojeva dobivamo brojeve koji općenito nisu prirodni (cijeli). Po analogiji s racionalnim brojevima, kvocijente dvaju polinoma nazivamo **racionalnim funkcijama**. Za razliku od polinoma, racionalne funkcije općenito nisu definirane na cijelom skupu $\mathbf{R}$. Njihove vrijednosti ne mogu se izračunati u točkama u kojima im nazivnik poprima vrijednost 0. Naravno, postoje i racionalne funkcije koje su definirane na cijelom $\mathbf{R}$. Polinomi su specijalni slučaj racionalnih funkcija kojima je polinom u nazivniku jednak konstanti.

3.1.1 Linearna funkcija

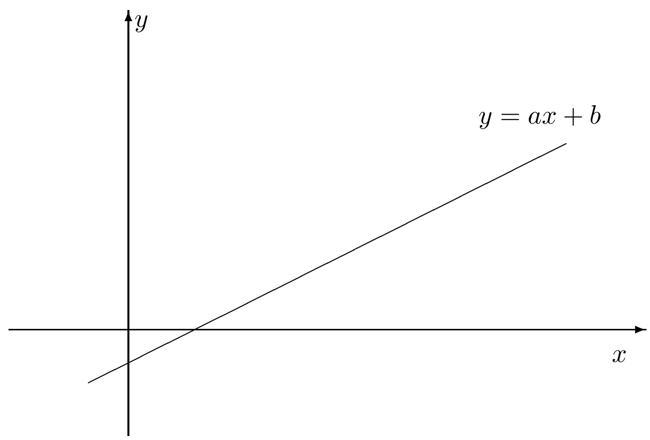
Primjer 50 *Izrazimo ovisnost opsega O kružnice o njenom polumjeru r:*

$$O(r) = 2\pi r.$$

Imamo primjer linearne funkcije. One su polinomi stupnja manjeg ili jednakog 1. Ovisnost opsega kružnice o njenom polumjeru primjer je proporcionalne ovisnosti.

Definicija 17 *Veličina y je **izravno proporcionalna** ili **izravno razmjerna** veličini x ako postoji konstanta $k \in \mathbf{R}$, $k \neq 0$ takva da je $y = kx$. Veličina y je **obrnuto proporcionalna** ili **obrnuto razmjerna** veličini x ako postoji konstanta $k \in \mathbf{R}$, $k \neq 0$ takva da je $y = \frac{k}{x}$.*

Izravna proporcionalnost je specijalni slučaj linearne ovisnosti. Linearnu ovisnost opisuje **linearna funkcija**. Linearna funkcija je polinom stupnja manjeg ili jednakog 1 pa je opći oblik linearne funkcije $f(x) = ax+b$. Graf linearne funkcije $f(x) = ax+b$ je pravac $y = ax+b$ s koeficijentom smjera a i odsječkom na osi y jednakim b. Linearna funkcija $f(x) = ax + b$ je rastuća ako i samo ako je $a \geq 0$, a padajuća ako i samo ako je $a \leq 0$. Linearna funkcija je strogo rastuća (strogo padajuća) ako je $a > 0$ $(a < 0)$.



Za $a = 0$ imamo konstantnu funkciju $f(x) = b$. Kod linearne ovisnosti imamo jednoliku promjenu zavisne varijable, u smislu da jednake promjene nezavisne varijable rezultiraju jednakim promjenama zavisne varijable. Zbilja, promijenimo nezavisnu varijablu za 1 i promotrimo kolika je promjena zavisne varijable:

$$f(x+1) - f(x) = a(x+1) + b - (ax+b) = a.$$

Vidimo da promjena nezavisne varijable za 1 uzrokuje promjenu zavisne varijable za a. Kod funkcija koje nisu linearne to nije slučaj. Na primjer, kod funkcije $f(x) = x^2$, pomaknemo li se iz $x = 0$ u $x = 1$, vrijednost funkcije se promijeni za 1; pomaknemo li se iz $x = 3$ u $x = 4$ (dakle za isti iznos), promjena vrijednosti funkcije je $16 - 9 = 7$.

Primjer 51 *(funkcija troškova)*
U nekom proizvodnom pogonu fiksni trošak dnevne proizvodnje (režijski troškovi, plaće i doprinosi) je 1000 *kn, a varijabilni troškovi (materijal za rad, pakiranje, transport) iznose* 150 *kn po jedinici proizvoda. Kako ukupni dnevni troškovi proizvodnje* $T(n)$ *ovise o količini proizvoda* n*? Koliki je ukupni dnevni trošak ako je proizvedeno* 250 *komada proizvoda?*

Ukupni dnevni trošak zadan je izrazom

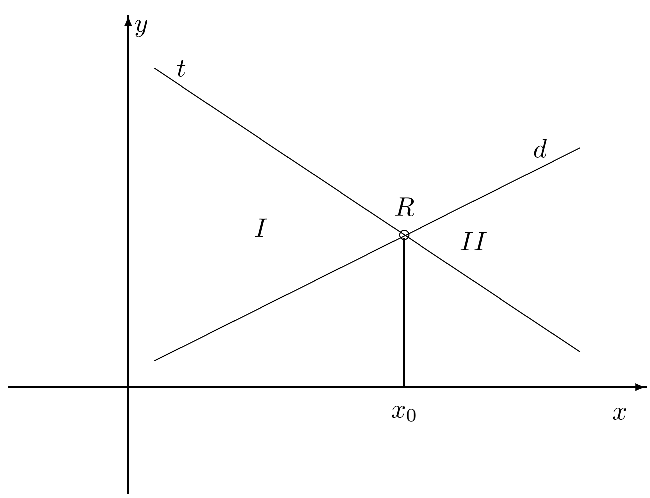
$$T(n) = 150n + 1000.$$

Za proizvedenih 250 *komada to iznosi* $T(250) = 150 \cdot 250 + 1000 = 38500$ *kn.*

Zakon ponude i potražnje

U tržišnoj ekonomiji cijena proizvoda određuje koliku će količinu proizvoda proizvođač biti spreman proizvesti i kupac kupiti. Označimo cijenu proizvoda s x. U opisivanju tržišta uvodimo dvije funkcije: **funkciju ponude**, u oznaci d i **funkciju potražnje**, u oznaci t. Količina proizvoda koju proizvođač nudi (ponuda) ovisi o cijeni proizvoda x. Količina proizvoda koju kupac kupuje (potražnja), također ovisi o cijeni proizvoda x. Stoga funkcije ponude i potražnje razmatramo kao funkcije cijene proizvoda x: $d(x)$ i $t(x)$. Međutim ovisnosti funkcija ponude i potražnje o cijeni proizvoda se bitno razlikuju. S porastom cijene, funkcija ponude raste. Za razliku od funkcije ponude, funkcija potražnje s porastom cijene pada. Zakon ponude i potražnje kaže da će se u uvjetima tržišnog natjecanja proizvod prodavati po fiksnoj, tzv. **ravnotežnoj cijeni**. Naime, ako je cijena proizvoda visoka, ponuda je velika, a potražnja mala pa se javlja višak robe na tržištu. Proizvođač je stoga prinuđen cijenu spustiti. Ako je, pak, cijena niža od ravnotežne, potražnja je veća od ponude i javlja se manjak robe na tržištu. U tim uvjetima proizvođač može (i hoće) povisiti cijenu proizvoda.

Uzmimo da su funkcije ponude i potražnje linearne funkcije. Grafove tih funkcija crtamo u koordinatnom sustavu u kome je cijena (kao nezavisna varijabla) smještena na osi x, a količina proizvodnje smještena je na osi y. Na slici, rastući pravac predstavlja graf funkcije ponude d, a padajući pravac graf funkcije potražnje t. Ravnotežna cijena x_0 je apscisa točke R u kojoj se ta dva pravca sijeku. Dio ravnine označen s I je tzv. mjesto manjka proizvoda. Dio ravnine označen s II je tzv. mjesto viška proizvoda.



Primjer 52 *Neka su zadane linearne funkcije ponude i potražnje, u ovisnosti o cijeni*

proizvoda x:

$$\begin{aligned} d(x) &= 2x + 50 \\ t(x) &= 200 - x. \end{aligned}$$

Odredimo ravnotežnu cijenu proizvoda.

Riješavamo jednadžbu $2x + 50 = 200 - x$. Rješenje je $x = 50$. Prodaje li se proizvod po cijeni manjoj od 50 kn, potražnja za njim bit će veća od ponude. Ukoliko mu je cijena veća od 50 kn na tržištu će se javiti višak proizvoda jer je ponuda veća od potražnje.

Za određenu količinu proizvodnje x možemo promotriti tri funkcije: **funkciju ukupnog troška** proizvodnje T, **funkciju prihoda** P i **funkciju dobiti** D. Funkciju troška smo već sreli, definirajmo preostale dvije funkcije. Funkcija prihoda P prikazuje prihod proizvodnje. Ukoliko se jedna jednica proizvoda prodaje po cijeni c, prihod od prodaje x jedinica je $P(x) = c \cdot x$. Ukoliko cijena proizvoda ovisi o količini proizvodnje x kao $c(x)$, prihod od prodaje x jedinica je $P(x) = c(x) \cdot x$. Funkcija dobiti D definira se kao razlika funkcije prihoda i funkcije ukupnih troškova: $D = P - T$. Količinu proizvodnje x_0 za koju je $D(x_0) = 0$ zovemo **mjestom izjednačenja** (troškova i prihoda!).

Primjer 53 *Proizvođač satova ima fiksan dnevni trošak proizvodnje od 10000 kn te još 150 kn po svakom satu koji proizvede. Ako jedan sat prodaje po cijeni od 250 kn, koliko satova treba dnevno proizvesti da bi mu proizvodnja pokrila troškove?*

Funkcije ukupnih troškova T i prihoda P u ovisnosti o broju x dnevno proizvedenih satova glase:

$$\begin{aligned} T(x) &= 150x + 10000, \\ P(x) &= 250x. \end{aligned}$$

Odredimo količinu proizvodnje x_0 za koju su ta dva iznosa jednaka. Rješavamo jednadžbu

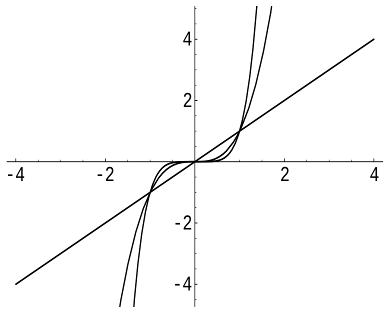
$$150x_0 + 10000 = 250x_0.$$

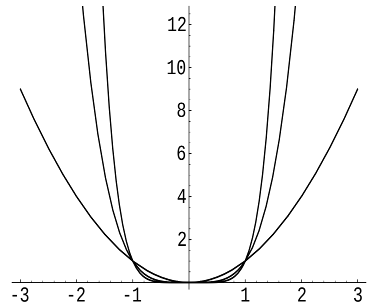
Rješenje je $x_0 = 100$. Dakle, svaka proizvodnja manja od 100 satova dnevno ne pokriva trošak procesa proizvodnje. Naprotiv, svaka proizvodnja veća od 100 satova dnevno donosi dobit.

3.1.2 Potencije

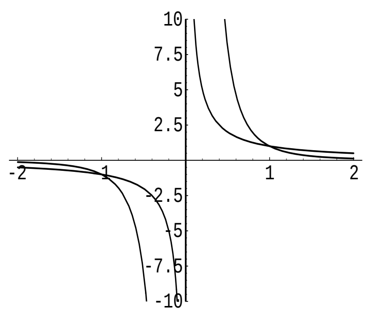
U nastavku definiramo funkcije $f(x) = x^a$ za eksponente a koji su redom prirodni, cijeli i racionalni brojevi i analiziramo izgled njihovih grafova.

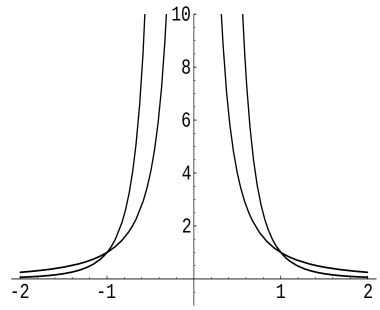
1. Neka je $n \in \mathbf{N}$ i neka je zadana funkcija $f(x) = x^n$. Područje definicije takve funkcije je cijeli skup $\mathbf{R}$. Područje vrijednosti i oblik grafa potencije s pozitivnim cjelobrojnim eksponentom ovise o parnosti eksponenta. Slika lijevo prikazuje grafove funkcija $f(x) = x^n$ za $n = 1, 3, 5$, a slika desno za $n = 2, 4, 6$. Za vrijednosti $|x| > 1$, s porastom eksponenta u oba slučaja grafovi funkcija postaju sve bliži osi y.



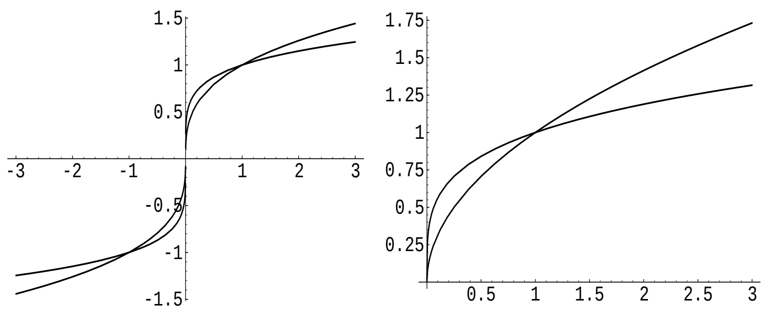


2. Ako je eksponent potencije negativan cijeli broj, znamo da je $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbf{N}$. Izraz ne možemo izračunati kad je $x = 0$. Dakle, područje definicije funkcije $f(x) = x^{-n}$ je skup $\mathbf{R} \setminus 0$. Ponovno, područje vrijednosti i oblik grafa ovise o parnosti eksponenta n. Slika lijevo prikazuje grafove funkcija $f(x) = x^{-n}$ za $n = 1, 3$, a slika desno za $n = 2, 4$. Grafovi za vrijednosti $|x| < 1$ s porastom eksponenta postaju udaljeniji od osi y.





3. Za razlomljene eksponente oblika $a = \frac{m}{n}$, pri čemu je $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, je $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$. Za parne n takve su funkcije definirane samo za nenegativne vrijednosti nezavisne varijable x; za neparne n, definirane su na cijelom $\mathbf{R}$. Područje vrijednosti i oblik grafa prikazani su na donjoj slici: lijevo je graf funkcije $f(x) = \sqrt[n]{x}$ za $n = 3, 5$. S porastom eksponenta, za $|x| > 1$, grafovi postaju sve bliži osi x. Desna slika prikazuje grafove funkcija $f(x) = \sqrt{x}$ i $f(x) = \sqrt[4]{x}$. Definirane su za $x \geq 0$. Za $x > 1$ je graf funkcije $f(x) = \sqrt[4]{x}$ bliži osi x od grafa funkcije $f(x) = \sqrt{x}$, dok je za $0 < x < 1$ obratno.



3.1.3 Polinomi

Definicija 18 *Neka su zadani realni brojevi* $a_n, \ldots, a_1, a_0$*,* $a_n \neq 0$. **Polinom n-tog stupnja** P_n *u varijabli* x *je funkcija zadana formulom*

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Realne konstante $a_n, \ldots, a_1, a_0$, $a_n \neq 0$ su **koeficijenti** polinoma P_n. Koeficijent a_n zove se **vodeći**, a a_0 je **slobodni koeficijent**. **Stupanj polinoma** je najveći eksponent nezavisne varijable x u formuli za P_n. Polinomi su definirani na cijelom $\mathbf{R}$.

Primjer 54 *Troškovi sjetve na kvadratičnoj njivi stranice* a *i njenog ograđivanja dani su formulom*

$$T(a) = C_2 a^2 + C_1 a + C_0.$$

Ovdje je C_2 *trošak sjetve po jedinici površine,* C_1 *trošak ograđivanja po jedinici duljine, a* C_0 *režijski troškovi koji ne ovise ni o površini njive, ni o duljini ograde.*

Funkcija iz gornjeg primjera je primjer polinoma drugog stupnja ili kvadratne funkcije. Graf kvadratne funkcije je krivulja koja se zove **parabola**. Za kvadratnu funkciju $f(x) = ax^2 + bx + c$ pripadna parabola ima os simetrije paralelnu s osi y; otvor joj je okrenut prema gore ako je $a > 0$ (vidite srednju sliku u Primjeru 56), a prema dolje ako je $a < 0$. Tjeme parabole ima koordinate $(-b/2a, -D/4a)$, gdje je D diskriminanta kvadratne funkcije, $D = b^2 - 4ac$.

Primjer 55 *Avion može prevesti* 100 *putnika. Avionska kompanija za let od Zagreba do Dubrovnika naplaćuje* 540 *kn po putniku. Za svako prazno mjesto na letu po prodanoj karti kompanija dobiva subvenciju od* 10 *kuna na cijenu karte. Odredimo za koji broj putnika na letu je prihod prijevoznika najveća, te koliki je najveći prihod?*

Označimo s x broj praznih mjesta. Tada je broj putnika na letu $100 - x$, a prihod koji svaki od njih (s uračunatom subvencijom) donosi prijevozniku je $540 + 10x$ kn. Ukupni prihod na letu je

$$P(x) = (100 - x)(540 + 10x).$$

Naš problem se svodi na određivanje vrijednosti x za koju je vrijednost funkcije P najveća. Raspišemo li izraz za $P(x)$ i sredimo po potencijama od x, vidimo da je riječ o kvadratnoj funkciji $P(x) = -10x^2+460x+54000$. Određivanje vrijednosti argumenta za koju se neka funkcija minimizira ili maksimizira je u pravilu složen problem, no u specijalnom slučaju kvadratne funkcije možemo ga lako riješiti. Koristimo se znanjem o koordinatama tjemena parabole. Naime, za parabolu okrenutu prema dolje, tjeme je najviša točka i njegova y koordinata predstavlja najveću vrijednost funkcije, a njegova x koordinata predstavlja odgovarajuću vrijednost argumenta. Iz formula $x_T = -b/2a$ uvrštavanjem $b = 460$ i $a = -10$ dobivamo $x_T = 23$. Dakle, tvrtka ima najveći prihod ako ostanu neprodana 23 mjesta. Vrijednost prihoda dobivamo uvrštavanjem $x_T = 23$ u formulu za $P(x)$ (ili korištenjem formule za y koordinatu tjemena). Maksimalni prihod je $P(23) = 59290$ kn.

Definicija 19 *Broj $x_0 \in \mathbf{R}$ za koji je $P_n(x_0) = 0$ je* **nultočka** *polinoma P_n. Kažemo da je x_0 nultočka k-tog reda polinoma P_n ako je*

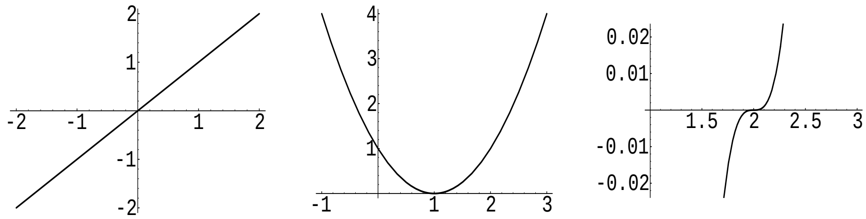
$$P_n(x) = (x - x_0)^k Q_{n-k}(x),$$

pri čemu je Q_{n-k} polinom stupnja $(n - k)$ kojemu x_0 nije nultočka.

Primijetimo da bi bilo pravilnije reći da je broj x_0 nulište polinoma, a da je točka $(x_0, 0)$ u kojoj graf polinoma siječe os x nultočka grafa polinoma. Polinom prvog stupnja (linearna funkcija) ima točno jednu nultočku. Polinom n-tog stupnja može imati najviše n realnih nultočaka. Neke od nultočaka polinoma mogu biti i kompleksni brojevi, oni se tada javljaju u paru. Polinom neparnog stupnja mora stoga imati barem jednu realnu nultočku. Polinom parnog stupnja ne mora imati realnih nultočki. Primjer takvog polinoma je kvadratna funkcija čija je diskriminanta negativna. U sljedećem primjeru ispitujemo ponašanje polinoma u nultočkama parnog i neparnog reda.

Primjer 56 *Na slikama su redom grafovi polinoma: $f(x) = x$, $g(x) = (x - 1)^2$ i $h(x) = (x - 2)^3$.*

Polinom $f(x) = x$ ima u $x = 0$ nultočku prvog reda (slika ispod, lijevo). Polinom $g(x) = (x-1)^2$ ima u točki $x = 1$ nultočku drugog reda (slika ispod, sredina). Polinom $h(x) = (x - 2)^3$ na slici dolje desno ima u $x = 2$ nultočku trećeg reda. Primijetimo da u nultočkama neparnog reda funkcija mijenja predznak, dok u nultočkama parnog reda nema promjene predznaka.



3.1.4 Racionalne funkcije

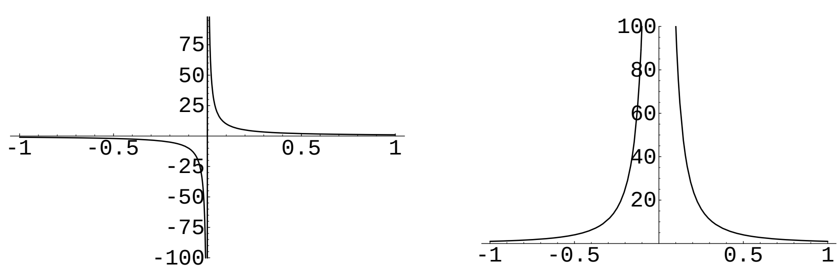
Zbroj, razlika i umnožak polinoma je ponovno polinom. Kvocijent dvaju polinoma općenito nije polinom.

Definicija 20 *Funkcija f je* **racionalna** *ako je oblika*

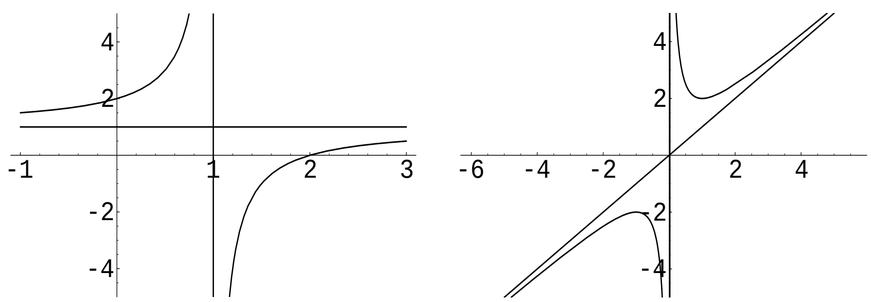
$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

pri čemu su P_n i Q_m polinomi stupnjeva n, odnosno m.

Racionalna funkcija $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ je definirana u svim realnim brojevima osim u onima u kojima je nazivnik jednak 0. Dakle, $\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbf{R} : Q_m(x) \neq 0\}$. Smatramo da je algebarski izraz kojim je zadana racionalna funkcija već skraćen, tj. da ne postoji $x_0 \in \mathbf{R}$ koji je nultočka i brojnika i nazivnika. Nultočke racionalne funkcije su nultočke njenog brojnika. Dakle, $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0$ ako i samo ako je $P_n(x) = 0$. Nultočke polinoma u nazivniku racionalne funkcije zovemo **polovima** racionalne funkcije. Racionalna funkcija u polu ima **vertikalnu asimptotu**. Red pola je red odgovarajuće nultočke nazivnika. Ovisno o tome je li pol parnog ili neparnog reda vrijednosti racionalne funkcije teže u suprotne beskonačnosti (s jedne strane vertikalne asimptote u $+\infty$, a s druge u $-\infty$) ili prema istoj beskonačnosti (s obje strane vertikalne asimptote u $+\infty$ ili s obje strane vertikalne asimptote u $-\infty$). Ilustriramo to na primjeru grafova funkcija $\frac{1}{x}$ i $\frac{1}{x^2}$:

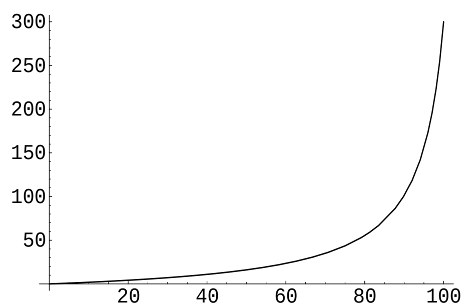


Osim vertikalnih, racionalne funkcije mogu imati još i **horizontalne i kose asimptote**. Racionalna funkcija ima horizontalnu asimptotu $y = 0$ ako je stupanj polinoma u brojniku manji od stupnja polinoma u nazivniku. Ako je stupanj polinoma u brojniku jednak stupnju polinoma u nazivniku, racionalna funkcija ima horizontalnu asimptotu $y = c$, gdje je c jednak kvocijentu vodećih koeficijenata polinoma u brojniku i nazivniku. Ako je stupanj polinoma u brojniku za točno 1 veći od stupnja polinoma u nazivniku, racionalna funkcija ima kosu asimptotu. Ako je stupanj polinoma u brojniku barem za 2 veći od stupnja polinoma u nazivniku, racionalna funkcija nema ni horizontalne ni kose asimptote. Na lijevoj slici vidimo racionalnu funkciju s horizontalnom asimptotom $y = 1$ i s vertikalnom asimptotom $x = 1$. Desna slika prikazuje racionalnu funkciju s vertikalnom asimptotom $x = 0$ i s kosom asimptotom $y = x$.



Primjer 57 *(Funkcija cijene i koristi)*
Cijena (u desetcima tisuća kuna) uklanjanja x *postotaka zagađenja iz zraka dana je funkcijom* $Z(x) = \frac{18x}{106-x}$. *Izračunajmo koliko košta smanjenje zagađenja za* 50%.

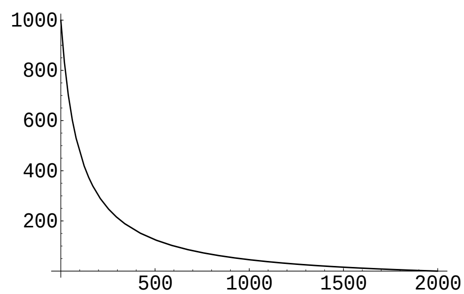
Graf funkcije f *prikazan je na sljedećoj slici. Cijena smanjenja zagađenja za* 50% *je* $10000 \cdot Z(50) = 160714.29$ *kn. Iz grafa se može vidjeti da se glavnina zagađenja može otkloniti za razumnu cijenu, no da je potpuno uklanjanje zagađenja vrlo skupo.*



Promotrimo na istom primjeru i malo drugačiji problem: Koliko zagađenja možemo ukloniti raspolažemo li proračunom od 500000 *kn. Prvi se problem svodio na uvrštavanje zadane vrijednosti argumenta u formulu za vrijednost funkcije. Ovaj se* *problem svodi na rješavanje jednadžbe* $10000Z(x) = 50000$. *Rješenje jednadžbe je* $x = 77.94$ *pa se, raspolažemo li proračunom od* 500000 *kn, može ukloniti* 77.94% *zagađenja.*

Primjer 58 *(Funkcija izmjene proizvoda)*
Ova funkcija daje odnos između količina dvaju proizvoda koje mogu biti proizvedene u istom proizvodnom ciklusu ako se proizvodnje međusobno isključuju. Promatramo primjer vinarije koja u boce toči crno i bijelo vino. Ovisnost količine y (u litrama) crnog vina o količini x (u litrama) bijelog vina dana je funkcijom

$$y(x) = \frac{100000 - 50x}{100 + x}.$$



Nacrtan je dio grafa u I kvadrantu (količine ne mogu biti negativne!). Odredimo koje su maksimalne količine pojedine vrste vina koje mogu biti utočene u boce. Imamo:

1. $f(0) = 1000$ - *točimo samo crno vino;*
2. $f(x) = 0 \Longrightarrow x = 2000$ - *točimo samo bijelo vino.*

3.2 Eksponencijalne funkcije

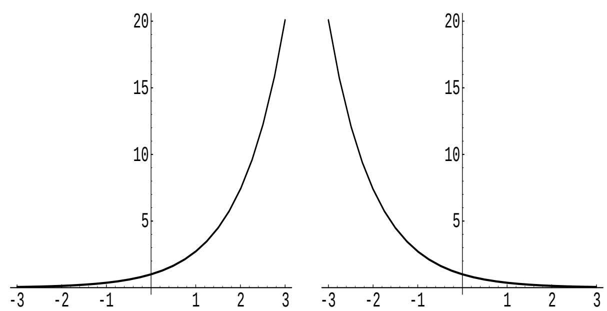
Eksponencijalne se funkcije prirodno javljaju kao matematički modeli situacija u kojima je brzina promjene neke veličine proporcionalna toj veličini. Primjeri su rast populacije, prirast biomase, razmnožavanje bakterija, raspadanje radioaktivnih tvari, itd.

Definicija 21 Eksponencijalna funkcija *s bazom a $(a > 0, \quad a \neq 1)$ je funkcija definirana formulom $f(x) = a^x, x \in \mathbf{R}$.*

Nezavisna varijabla se nalazi u eksponentu, odatle i ime funkcije. To je i temeljna razlika od potencije, u kojoj se nezavisna varijabla nalazi u bazi potencije, a eksponent je konstantan. Od svih mogućih baza eksponencijalnih funkcija jedna se izdvaja. To je baza koju označavamo slovom e. Približna vrijednost broja e je $e \approx 2.718281828$. Broj e je jedna od fundamentalnih konstanta prirode, slično kao konstanta π. Kasnije ćemo pokazati da se svaka eksponencijalna funkcija može prikazati kao eksponencijalna funkcija s bazom e.

Vrijednosti eksponencijalne funkcije mogu se izračunati za sve realne brojeve, dakle je domena eksponencijalne funkcije čitav $\mathbf{R}$. Vrijednosti eksponencijalne funkcije su strogo pozitivne, to znači da je slika eksponencijalne funkcije skup $\mathbf{R}^+ =< 0, +\infty >$.

Na slici su skicirani grafovi funkcija $f(x) = a^x$ za $a > 1$ (slika lijevo) i $0 < a < 1$ (slika desno):



Sa slika možemo vidjeti da je x-os horizontalna asimptota grafa funkcije $f(x) = a^x$. Za $a > 1$ graf funkcije joj se približava za negativne vrijednosti x. Za $0 < a < 1$ graf funkcije $f(x) = a^x$ približava se x-osi s porastom pozitivnih vrijednosti x. Primijetimo da za baze $0 < a < 1$, graf funkcije $f(x) = a^x$ dobivamo iz grafa funkcije $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ zrcaljenjem preko y-osi. (Za $0 < a < 1$ je $\frac{1}{a} > 1$). Funkcija $f(x) = a^x$ je rastuća ako je baza $a > 1$, padajuća ako je $0 < a < 1$.

Grafovi svih eksponencijalnih funkcija prolaze kroz točku $(0, 1)$, jer je $a^0 = 1$ za svaki pozitivan broj a.

Osnovna svojstva eksponencijalnih izraza

1. $a^x = a^y \Longrightarrow x = y$,
2. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$,
3. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$,
4. $(a^x)^y = a^{xy}$,

5. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$,

6. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

Primjer 59 *Recimo da netko uloži glavnicu C na štednju uz 10% godišnje kamate. Kolikim iznosom raspolaže nakon n godina ako je obračun kamate godišnji, složen i dekurzivan?*

Prema izrazu za konačnu vrijednost jednokratne uplate pri složenom kamatnom računu je

$$C(n) = C_n = C \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right)^n = C \cdot 1.1^n.$$

Primjer 60 *(Neograničeni eksponencijalni rast)*
Broj jedinki neke vrste na nekom području se, pod povoljnim uvjetima, udvostručuje svake godine. Nakon t povoljnih godina od uvođenja vrste u to područje, brojno stanje populacije je $B(t) = 6 \cdot 2^t$.

(a) Odredimo početni broj jedinki: $B(0) = 6 \cdot 2^0 = 6$.
(b) Popunimo tablicu i odredimo broj jedinki po isteku četvrte godine od njihovog naseljavanja.

t	1	2	3	4	5
$B(t)$	12	24	48	96	192

Vidimo da je $B(4) = 96$.

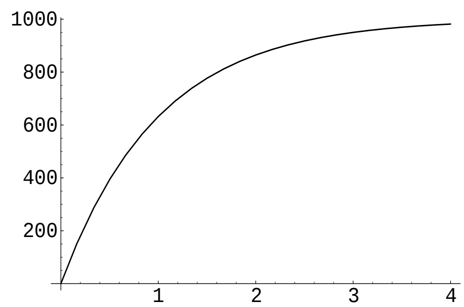
Primjer 61 *(Ograničeni eksponencijalni rast)*
Prodaja nekog novog proizvoda u početku brzo raste, a zatim se tržište polako zasićuje. Na primjer, broj prodanih primjeraka novog tipa otvarača za konzerve je opisan funkcijom

$$P(x) = 1000(1 - 3^{-x}),$$

pri čemu x označava broj godina proteklih od pojave otvarača na tržištu. Izračunajmo početnu te količine prodanih otvarača nakon prve i druge godine:

$$P(0) = 1000(1 - \frac{1}{3}) = 667, P(1) = 1000(1 - \frac{1}{9}) = 889, P(2) = 1000(1 - \frac{1}{27}) = 963.$$

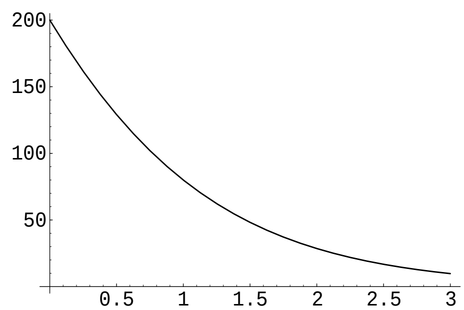
(Gore su vrijednosti zaokružene na najbliži cijeli broj.) Primjer funkcije prodaje je primjer funkcije ograničenog rasta. Kako se pri računanju $P(x)$ od broja 1000 oduzimaju sve manji i manji iznosi, zaključujemo da graf funkcije $P(x)$ ima za horizontalnu asimptotu pravac $y = 1000$:



Primjer 62 *Funkcija koja opisuje ukupan broj učenjem zapamćenih činjenica u ovisnosti o vremenu proteklom od prestanka učenja dana je formulom*

$$N(t) = y_0 \cdot \frac{1}{1 + 3^{t+1}}.$$

Ovdje je t broj mjeseci proteklih od prestanka učenja, a y_0 broj činjenica poznatih učeniku u trenutku prestanka učenja.



Graf te funkcije prikazuje tzv. **krivulju zaboravljanja**. Na slici je graf funkcije $N(t) = \frac{800}{1+3^{t+1}}$.

Sličan oblik grafa imaju funkcije koje opisuju radioaktivni raspad.

Primjer 63 *Izotop ugljika C^{14} je zastupljen u određenoj količini u svim živim bićima. Nakon prestanka izmjene tvari s okolinom, tj. nakon smrti organizma, radioaktivni C^{14} se više ne obnavlja i zatečena količina se raspada. Količina izotopa preostala nakon t godina je zadana formulom*

$$C(t) = C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}.$$

Ovdje je C_0 količina izotopa C^{14} u živoj tvari. Odredimo koliko je stara kost u kojoj ima 4 puta manje ugljika C^{14} nego u živoj kosti.

Rečeno je

$$C(t) = \frac{C_0}{4},$$

znači da je

$$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

Odavde je $t/5730 = 2$*, odnosno* $t = 11460$ *godina.*

3.3 Logaritamska funkcija

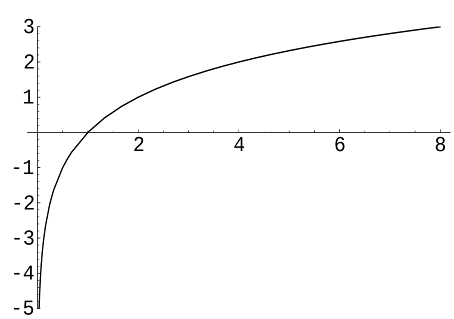
Definicija 22 *Neka je* $a > 0$, $a \neq 1$. **Logaritam** *pozitivnog realnog broja* x *po bazi* a *je broj* c *kojim treba potencirati bazu* a *da bi se dobio broj* x*. Znači*

$$c = \log_a x \Longleftrightarrow a^c = x.$$

Definicija 23 *Neka je zadan realan broj* $(a > 0, \quad a \neq 1)$. **Logaritamska funkcija** *s bazom* a *je funkcija definirana formulom* $f(x) = \log_a x$, $x > 0$.

Logaritam broja $x > 0$ po bazi e zovemo **prirodnim** i označavamo s $\ln x$. U primjenama su najčešći logaritmi s bazom 10. Takve logaritme zovemo dekadskima i označavamo s $\log x$ tj. ne pišemo bazu 10. Iz definicije vidimo da logaritme možemo računati samo za pozitivne realne brojeve.

Primjer 64 *Na slici je prikazan graf funkcije* $f(x) = \log_2 x$.

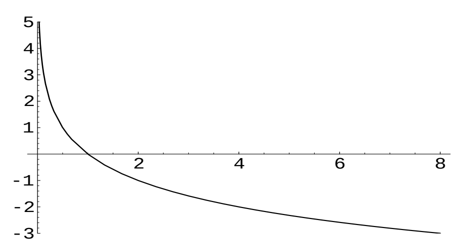


Taj je graf ilustrativan primjer grafa svake logaritamske funkcije s bazom većom od jedan. Sve takve funkcije imaju sljedeća svojstva:
- rastuće su; graf im prolazi kroz točku $(1,0)$;
- domena im je skup $\mathbf{R}^+ =< 0, \infty >$; slika im je cijeli $\mathbf{R}$
- vrijednosti funkcije teže u $-\infty$ kada vrijednosti argumenta teže u nulu, tj. y-os je vertikalna asimptota grafa.

Osnovna svojstva logaritama: neka su x, y pozitivni realni brojevi, $r \in \mathbf{R}$.

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$,
2. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$,
3. $\log_a x^r = r \log_a x$,
4. $\log_a a = 1; \log_a 1 = 0$,
5. $\log_a a^y = y; a^{\log_a x} = x$,
6. $\log_{1/a} x = -\log_a x$

Iz svojstva 6 vidimo da graf logaritamske funkcije s bazom $0 < a < 1$ dobivamo zrcaljenjem grafa logaritamske funkcije s bazom $1/a$ preko osi x. Primjer grafa takve logaritamske funkcije prikazan je na sljedećoj slici.



Logaritamske funkcije s bazom $0 < a < 1$ su padajuće i vrijednosti im teže u $+\infty$ kada vrijednosti argumenta teže u 0. Ostala svojstva su im ista kao i za logaritamske funkcije s bazom većom od 1.

Vrijednosti logaritma istog broja x po dvjema različitim bazama povezane su sljedećom formulom:

$$\log_a x = \log_a b \log_b x.$$

Vidimo da su vrijednosti logaritama proporcionalne. Konstantu proporcionalnosti $M = \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ zovemo modulom prijelaza. Zahvaljujući gornjoj relaciji, dovoljno je poznavati vrijednosti logaritamske funkcije za jednu bazu; za sve ostale baze koristimo se odgovarajućim modulima prijelaza.

Najčešće korištene baze su 10 (dekadski ili Briggsovi logaritmi), e (prirodni ili Napierovi logaritmi) i 2 (binarni logaritmi). Vrijednosti dekadskih logaritama su tabelirane u logaritamskim tablicama. S porastom dostupnosti elektroničkih računala važnost logaritamskih tablica kao pomagala pri računanju se počela smanjivati, no logaritamska funkcija je i dalje bitna za opis i razumijevanje mnogih prirodnih pojava.

Primjer 65 *Neka je količina ostatka radioaktivne tvari t dana nakon početka raspadanja zadana formulom $C(t) = 1000 \cdot e^{-0.1t}$. Odredimo vrijeme poluraspada te tvari.*

Vrijeme poluraspada je vrijeme potrebno da se početna količina tvari smanji na polovicu. Tražimo, dakle, vrijeme t za koje je $C(t) = \frac{C_0}{2}$. Početnu količinu radioaktivne tvari saznajemo uvrštavajući $t = 0$ u formulu za $C(t)$. Dobivamo $C_0 = C(0) = 1000$. Tražimo t takav da je

$$1000e^{-0.1t} = 500.$$

Da bismo odredili t, moramo riješiti tu jednadžbu. Prvo je podijelimo s 1000 pa logaritmiramo obje strane. Dobivamo jednadžbu

$$-0.1t = \ln \frac{1}{2},$$

a iz nje lako dobivamo $t \approx 6.9$. Dakle, vrijeme poluraspada jednako je 6.9 dana.

Primjer 66 *Richterova ljestvica služi za izražavanje i uspoređivanje jačina potresa. Potresu jačine I pridružuje se na Richterovoj ljestvici broj $j(I) = \log \frac{I}{I_0}$, gdje je I_0 fiksna jačina vrlo slabog potresa kojeg još registriraju instrumenti. Izrazimo brojevima s Richterove ljestvice jačine potresa $1000I_0$, $1000000I_0$ i $1000000000I_0$. Koliko puta je potres jačine 7.3 po Richteru jači od potresa jačine 5.3?*

Potresi su jačine 3, 6 i 9 na Richterovoj ljestvici. Ako je $j(I_1) = 7.3$, a $j(I_2) = 5.3$, to znači da je $I_1 = 10^{7.3}I_0$ i $I_2 = 10^{5.3}I_0$. Odatle je $I_1/I_2 = 10^2$. Dakle, pomak za 2 na Richterovoj ljestvici znači promjenu jačine za faktor $10^2 = 100$.

Primjer 67 *Broj bakterija u nekoj kulturi opada po formuli $B(t) = 250000e^{-0.4t}$, gdje je t vrijeme izraženo u satima. Koliki je početni broj bakterija? Koliko će bakterija biti u kulturi nakon jednog sata? Nakon koliko sati će u kulturi ostati još samo 25000 bakterija?*

Početni broj bakterija je $B(0) = 250000$. Odgovor na drugo pitanje podrazumijeva uvrštavanje $t = 1$ u formulu $B(t)$; odgovor je $B(1) = 250000e^{-0.4} \approx 167580$. Da odgovorimo na treće pitanje, treba riješiti jednadžbu $250000e^{-0.4t} = 25000$ po nepoznanici t. Logaritmiranjem dobivamo $-0.4t = \ln \frac{1}{10}$, odakle slijedi $t \approx 5.76$ sati.

3.4 Operacije s funkcijama

3.4.1 Osnovna svojstva funkcija

Pojam funkcije je vrlo općenit i obuhvaća sve moguće vrste ovisnosti jedne veličine o drugoj. Pokazuje se da najveći broj funkcija koje se pojavljuju u primjenama ima i neka dodatna svojstva. U ovom odjeljku dajemo pregled svojstava realnih funkcija realne varijable koja su za primjene najznačajnija.

Definicija 24 *Funkcija* $f : \mathcal{D} \to \mathcal{K}$ *je* **injekcija** *ako za* $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$ *uvjet* $x_1 \neq x_2$ *povlači* $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathcal{K}$ *je* **surjekcija** *ako za svaki* $y \in \mathcal{K}$ *postoji* $x \in \mathcal{D}$ *takav da je* $y = f(x)$.

Funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathcal{K}$ *je* **bijekcija** *ako je injekcija i surjekcija.*

Funkcija f koja je injekcija različitim vrijednostima argumenta pridružuje različite funkcijske vrijednosti. Kolokvijalno se još kaže da f ne lijepi argumente. Injektivnost se ponekad definira i uvjetom da jednakost slika povlači jednakost originala, tj. $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$. Taj je uvjet ekvivalentan onom iz definicije. Primijetimo da je funkcija surjektivna ako i samo ako je njena kodomena upravo jednaka njenoj slici, tj. $\mathcal{K} = \mathcal{R}(f)$. Injektivnost, surjektivnost i bijektivnost su važna svojstva realnih funkcija. S njima se najčešće susrećemo kod rješavanja jednadžbi. Surjektivnost osigurava postojanje rješenja, a injektivnost njegovu jedinstvenost.

Sljedeće važno svojstvo realnih funkcija je svojstvo neprekidnosti.

Definicija 25 *Funkcija* $f : \mathcal{D} \to \mathcal{K}$ *je* **neprekidna** *u točki* $x_0 \in \mathcal{D}$ *ako za svaki* $\epsilon > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *takav da*

$$(|x - x_0| < \delta) \Longrightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \epsilon).$$

Funkcija je neprekidna na intervalu $I \subseteq \mathcal{D}$ *ako je neprekidna u svakoj točki intervala* I.

Gornja je definicija samo formalizacija zahtjeva da mali pomaci u argumentu rezultiraju malim pomacima u vrijednosti funkcije.

Od funkcija koje smo do sada upoznali, polinomi i eksponencijalne funkcije su neprekidne na cijelom $\mathbf{R}$. Logaritamske funkcije su neprekidne na cijelom $\mathbf{R}^+$.

Racionalne funkcije su neprekidne na svojoj domeni. Zbroj, razlika i umnožak neprekidnih funkcija su neprekidne funkcije. Kvocijent neprekidnih funkcija je funkcija koja je neprekidna na svojoj domeni.

Definicija 26 *Funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathcal{K}$ je ograničena na skupu $I \subseteq \mathcal{D}$ ako postoje realni brojevi m i M takvi da je*

$$m \leq f(x) \leq M$$

za sve $x \in I$.

Svaka funkcija neprekidna u točki x_0 je i ograničena na nekoj okolini te točke.

3.4.2 Kompozicija funkcija

Primjer 68 *Naftna mrlja kružnog oblika polumjera r ima površinu $P(r) = r^2\pi$. Polumjer mrlje raste s vremenom; porast je opisan formulom $r(t) = 1 + t$. Kako površina mrlje ovisi o vremenu?*

Odgovor dobivamo uvrštavanjem formule za polumjer u formulu za površinu. Dakle, $P(t) = P(r(t)) = P(1 + t) = (1 + t)^2\pi$.

Gornji je primjer ilustracija načina kojim od poznatih funkcija možemo dobiti nove.

Definicija 27 *Za zadane realne funkcije $f : \mathcal{D} \to \mathcal{K}$ i $g : \mathcal{D}' \to \mathcal{K}'$ takve da je $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{D}'$ definiramo realnu funkciju $h = g \circ f$ na sljedeći način:*

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)].$$

Kažemo da je funkcija h **kompozicija** *funkcija f i g.*

Primjer 69 *Odredimo kompozicije $g \circ f$ i $f \circ g$ funkcija $f(x) = 3x$ i $g(x) = x^2 - 1$.*

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(3x) = (3x)^2 - 1 = 9x^2 - 1, \\ (f \circ g)(x) &= f(x^2 - 1) = 3(x^2 - 1) = 3x^2 - 3. \end{aligned}$$

Iz gornjeg primjera vidimo da operacija kompozicije funkcija nije komutativna, tj. da je općenito $g \circ f \neq f \circ g$. Ako su vrijednosti funkcije f elementi domene funkcije f, možemo ju komponirati i samu sa sobom. U takvom slučaju pišemo $f^2 = f \circ f$. Ovdje treba biti oprezan i ne miješati oznaku s operacijom kvadriranja vrijednosti funkcije f.

Važno je da se svojstvo neprekidnosti dobro nasljeđuje pri kompoziciji funkcija. Točnije, ako je funkcija f neprekidna u x_0, a funkcija g definirana i neprekidna u $f(x_0)$, onda je i kompozicija $g \circ f$ neprekidna u x_0.

Funkcija $i(x) = x$ ima s obzirom na operaciju kompozicije funkcija sličnu ulogu kao i broj 1 s obzirom na operaciju množenja realnih brojeva. Naime, za tu funkciju vrijedi $f \circ i = i \circ f = f$, za svaku funkciju f. Funkcija $i(x) = x$ se zove **identiteta**. Dakle, komponiranje s identitetom ne mijenja funkciju.

3.4.3 Inverzna funkcija

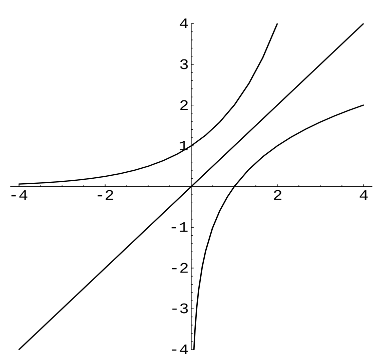
Promotrimo par funkcija $f(x) = 2x + 3$ i $g(x) = \frac{x-3}{2}$. Lako se vidi da je $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$. To znači da je ukupni učinak djelovanja obiju funkcija isti kao da se ništa nije desilo s argumentom x. Drugim riječima, djelovanje jedne od funkcija poništava učinak druge.

Definicija 28 *Neka je $f : \mathcal{D} \to \mathcal{K}$ bijekcija.* **Inverzna** *funkcija funkcije f je funkcija $g : \mathcal{K} \to \mathcal{D}$ za koju vrijedi*

$$(f \circ g)(x) = x,\ x \in \mathcal{K} \ \text{ i } \ (g \circ f)(x) = x,\ x \in \mathcal{D}.$$

Pišemo $g = f^{-1}$.

Inverzna funkcija eksponencijalne funkcije $f(x) = a^x$ je logaritamska funkcija $g(x) = \log_a x$. Grafovi funkcija $f(x) = 2^x$ i $f^{-1}(x) = \log_2 x$ su prikazani na sljedećoj slici:



Vidimo da su oni smješteni osno simetrično s obzirom na pravac $y = x$. To vrijedi općenito za svaki par grafova inverznih funkcija.

Nema svaka funkcija inverznu funkciju. Nužan i dovoljan uvjet postojanja inverzne funkcije za funkciju f je bijektivnost od f. Kako je svaka funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathcal{R}(f)$ surjekcija, postojanje inverzne funkcije je vezano uz injektivnost funkcije. Na primjer, funkcija $f(x) = x^2$ promatrana kao funkcija s $\mathbf{R}$ u ${\mathbf{R}_0}^+ = [0, +\infty >$ nema inverznu funkciju jer nije injektivna. Njena restrikcija, zadana istom formulom, ali promatrana kao funkcija s ${\mathbf{R}_0}^+$ na ${\mathbf{R}_0}^+$ je injektivna i inverz joj je zadan formulom $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Primjer 70 *Odredimo inverznu funkciju za funkciju* $f(x) = \ln(3x + 5)$.

Polazimo od definicije. Znamo da mora biti $(f \circ f^{-1})(x) = x$. *Iz tog uvjeta dobivamo jednadžbu koju treba riješiti po nepoznanici* $f^{-1}(x)$*:*

$$\begin{aligned} (f \circ f^{-1})(x) &= x \\ \ln(3f^{-1}(x) + 5) &= x \\ 3f^{-1}(x) + 5 &= e^x. \end{aligned}$$

Odavde je

$$f^{-1}(x) = \frac{e^x - 5}{3}.$$

3.5 Zadatci

1. Zadana je funkcija ukupnih troškova nekog poduzeća $T(q) = 2q + 3$. Koliki su fiksni troškovi proizvodnje? Koje je ekonomsko značenje koeficijenta 2 u funkciji ukupnih troškova $T(q)$?

2. Poduzeće proizvodi televizore uz 51000 kn fiksnih (mjesečnih) troškova i 1400 kn varijabilnih troškova po jedinici proizvoda.
   a) Odredite funkciju ukupnih troškova $T(x)$ u ovisnosti o broju proizvedenih televizora x.
   b) Ako se televizori prodaju po cijeni 2000 kn po komadu, izračunajte koliko komada televizora mora poduzeće prodati da bi pokrilo troškove proizvodnje.

3. Zadane su funkcije ponude i potražnje u ovisnosti o cijeni x (u kn) proizvoda:
   $$d(x) = x + 4, t(x) = \frac{5}{x}.$$
   Odredite ravnotežnu cijenu x.

4. Zadane su funkcije ponude i potražnje u ovisnosti o cijeni proizvoda x: $d(x) = 6x + 3$, $t(x) = 19 - 2x$.

a) Nacrtajte grafove funkcija ponude i potražnje u koordinatnom sustavu, označite područja manjka i viška na tržištu i mjesto gdje je ponuda jednaka potražnji.
b) Odredite ravnotežnu cijenu i ravnotežnu količinu proizvoda.

5. Kapacitet trajekta za prijevoz automobila je 100 mjesta. Cijena karte je 50 kn kad su sva mjesta popunjena. Sa svakim slobodnim mjestom cijena karte raste za 1 kn. Koji broj neprodanih mjesta donosi prijevozniku maksimalnu zaradu? Kolika je maksimalna zarada? Kolika je u tom slučaju cijena karte?

6. Funkcija
$$f(x) = e^{-0.2x}$$
opisuje postotak tostera koji su u ispravnom stanju nakon x godina uporabe. Koliki postotak tostera je ispravan nakon godinu dana uporabe?

7. a) Skicirajte graf funkcije $f(x) = \log_3 x$.
b) Riješite jednadžbu $e^{\frac{x+2}{3}} = 1$.

8. Kapacitet proizvodnje u nekom pogonu je 800 jedinica proizvoda dnevno. Zadane su funkcije ukupnih troškova i prihoda
$$T(x) = x^2 - 100x + 200, P(x) = x^2 + 50x.$$
Koliko proizvoda dnevno treba proizvoditi pogon da bi mu dobit bila maksimalna?

9. Trgovac može 3000 majica kratkih rukava prodati po cijeni od 60 kn po komadu. Povisi li cijenu za 1 kn, broj prodanih majica smanji se za 30 komada. Odredite po kojoj cijeni treba trgovac prodavati majice da bi mu prihod bio maksimalan?

10. Skicirajte u prvom kvadrantu dio grafa funkcije
$$y = \frac{125000 - 25x}{125 + x}$$
koja opisuje ovisnost količine (u L) dnevne proizvodnje lož-ulja y o proizvodnji benzina x u jednoj rafineriji. Kolika maksimalna količina pojedinog derivata može biti proizvedena u jednom danu?

11. Provjerite diferencijalnim računom da je funkcija $f(x) = 2 - x^2 + 3x$ svuda konveksna.

12. Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = \frac{3}{x^2-9}$ u točki s apscisom 1.

13. Predviđa se da će brojnost populacije neke zemlje nakon isteka t godina od sada biti
$$B(t) = 50e^{0.02t}.$$
a) Kolika je trenutna brojnost populacije te zemlje?
b) Kolika će biti brojnost populacije za 30 godina?

14. Odredite vrijeme poluraspada radioaktivne supstance ako je količina supstance nakon t dana od početka raspadanja zadana s

$$R(t) = 2350e^{-0.08t}.$$

15. Glasnoća zvuka mjeri se jedinicom decibel (dB). Intenzitet I_0 pripisuje se jedva čujnom zvuku. Ako zvuk ima intenzitet I, glasnoća se računa po formuli

$$G(I) = 10 \log \frac{I}{I_0}.$$

Odredite glasnoću (u dB) zvuka čiji je intenzitet:
a) $100I_0$ (šapat),
b) $10000000I_0$ (vrlo prometna ulica).

16. Odredite $f \circ g, g \circ f, f^2, g^2$ za $f(x) = 2x + 1$ i $g(x) = x - 2$.

17. Odredite $f \circ g, g \circ f$ za
a) $f(x) = x^2, g(x) = \frac{1}{x+1}$,
b) $f(x) = 2x + 3, g(x) = \frac{x-3}{2}$.

18. Odredite funkciju $h(x) = (g \circ f)(x)$ ako je $g(x) = e^x$, $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$.

Poglavlje 4

Derivacija

4.1 Granična vrijednost (limes) funkcije

Definicija 29 *Neka je f funkcija definirana u svakoj točki intervala I osim možda u $a \in I$. Za realan broj L kažemo da je* **granična vrijednost (limes)** *funkcije f u točki a ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve $x \in I \setminus \{a\}$*

$$(|x - a| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - L| < \varepsilon).$$

Ako je L limes funkcije f u točki a, pišemo

$$L = \lim_{x \to a} f(x).$$

Zapis čitamo kao "L je limes od $f(x)$ kad x teži k a". Kolokvijalno govoreći, L je limes od $f(x)$ kad x teži u a ako vrijednost $f(x)$ postaje po volji blizu vrijednosti L kako x postaje bliži i bliži vrijednosti a.

Definiraju se i jednostrani limesi funkcije.

Definicija 30 *Neka je funkcija f definirana u svakoj točki intervala I osim možda u $a \in I$. Za realan broj L_1 kažemo da je* **limes slijeva** *od $f(x)$ u točki a ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je $< a - \delta, a > \subseteq I$ te vrijedi*

$$(x < a \text{ i } |x - a| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - L_1| < \varepsilon).$$

Pišemo $L_1 = \lim_{x \to a-} f(x)$.

Za realan broj L_2 kažemo da je **limes zdesna** *od $f(x)$ u točki a ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je $< a, a+\delta > \subseteq I$ te vrijedi*

$$(x > a \ \text{ i } \ |x-a| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - L_2| < \varepsilon).$$

Pišemo $L_2 = \lim_{x \to a+} f(x)$.

Pokazuje se da vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 5 *Neka je $I \subseteq \mathbf{R}$ otvoreni interval. Funkcija $f : I \to \mathbf{R}$ je neprekidna u točki $x_0 \in I$ ako i samo ako postoje i lijevi i desni limes funkcije f u točki x_0 te je*

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = \lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0).$$

Tri su osnovne vrijednosti limesa koje ćemo koristiti u određivanju limesa funkcija. Intuitivno su jasne i navodimo ih bez dokaza:

$$\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

4.1.1 Veza računanja limesa funkcije i asimptote grafa funkcije

Ako je

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a, \ a \in \mathbf{R},$$

pravac $y = a$ je jednostrana desna horizontalna asimptota grafa funkcije f.
Ako je

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b, \ b \in \mathbf{R},$$

pravac $y = b$ je jednostrana lijeva horizontalna asimptota grafa funkcije f.
Ako je

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = a, \ a \in \mathbf{R},$$

pravac $y = a$ je (obostrana) horizontalna asimptota grafa funkcije f.
Ako je

$$\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty, c \in \mathbf{R},$$

pravac $x = c$ je vertikalna asimptota grafa funkcije f.

Primjer 71 *Kakve asimptote može imati polinom?*

Budući je $\lim_{x \to \pm\infty} P_n(x) = \pm\infty$, zaključujemo da polinomi nemaju horizontalnih asimptota. Kako je $\mathcal{D}(P_n) = \mathbf{R}$, a vertikalne asimptote se javljaju u konačnim rubovima domene, polinomi nemaju niti vertikalnih asimptota.

Primjer 72 *Odredimo sve asimptote grafa funkcije*

$$f(x) = \frac{1}{1+e^x}.$$

Budući je $\mathcal{D}(f) = \mathbf{R}$, *graf funkcije* f *nema vertikalnih asimptota. Dalje, računamo*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^x} &= \left(\frac{1}{1+e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty}\right) = 0, \\
\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^x} &= \left(\frac{1}{1+e^{-\infty}} = \frac{1}{1+\frac{1}{e^{+\infty}}} = \frac{1}{1+0}\right) = 1
\end{aligned}$$

Dakle, pravac $y = 0$ *je jednostrana desna horizontalna asimptota, a pravac* $y = 1$ *je jednostrana lijeva horizontalna asimptota grafa funkcije* f.

Primjer 73 *Odredimo sve asimptote funkcije* $f(x) = \ln x,\ x > 0$.

Budući je domena funkcije $f(x) = \ln x$ *skup* $< 0, +\infty >$, *valja provjeriti ima li funkcija* f *u* 0 *vertiaklnu asimptotu. Želimo li računati* $\lim_{x\to 0} \ln x$, *granici* 0 *možemo prići s nezavisnom varijablom samo zdesna. Iz izgleda grafa logaritamske funkcije znamo koliki je desni limes od* $\ln x$ *u* 0:

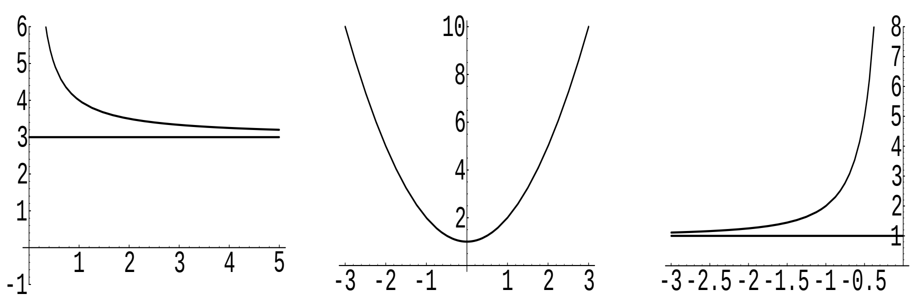
$$\lim_{x\to 0_+} \ln x = -\infty.$$

Dakle, pravac $x = 0$ *je vertikalna asimptota grafa funkcije* f. *Budući je*

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$$

funkcija f *nema horizontalne asimptote.*

Primjer 74 *Granične vrijednosti funkcija mogu se, ukoliko nam je poznat graf funkcije, "očitati" s grafa. Promotrimo grafove sljedećih funkcija:*



S prvog grafa vidimo da je:

$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = +\infty\,, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 3.$$

Kod parabole je:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty\,,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

S treće slike:

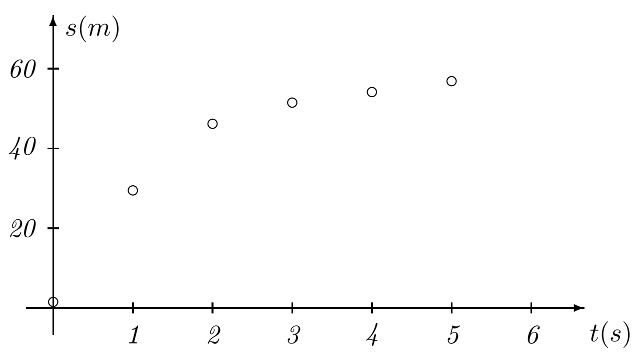
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1\,,\ \lim_{x\to 0_-} f(x) = +\infty.$$

4.2 Pojam i značenje derivacije

Primjer 75 *Signalna raketa ispaljena je vertikalno uvis; njezina udaljenost s (u metrima) od tla nakon isteka vremena t (mjerenog u sekundama) dana je tablicom*

$t(s)$	0	1	2	3	4	5
$s(m)$	2	29	46	53	56	57

a) Skicirajmo kako udaljenost rakete od tla ovisi o vremenu:



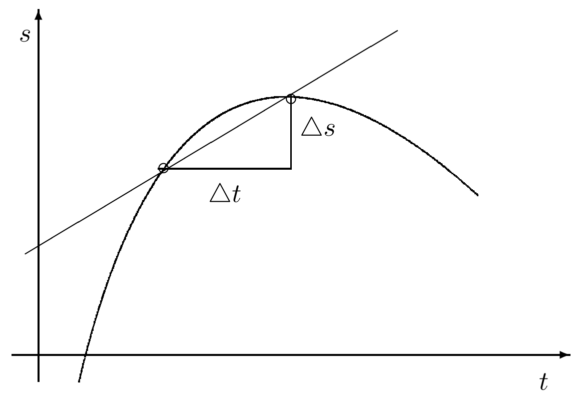
Spojimo li točke glatkom crtom, primjećujemo veću strminu grafa (brži porast visine) u prve 3 *s, potom se strmina ublažava (rast je vrlo spor).*

b) Kolika je prosječna brzina rakete tijekom 2. *sekunde njenog uspona?*

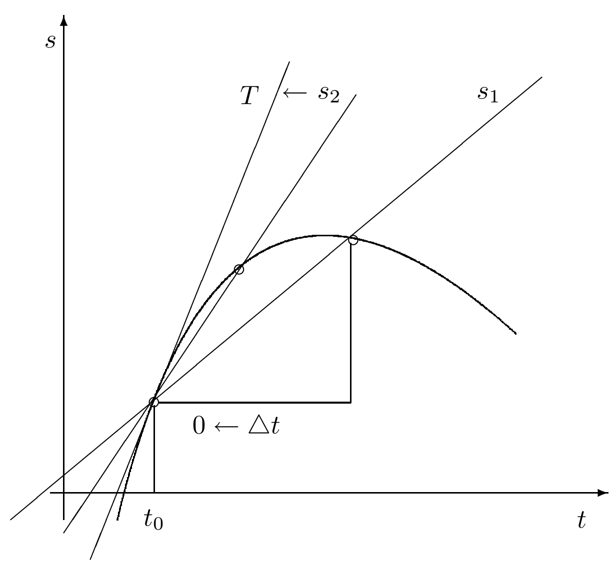
Prosječna brzina je jednaka omjeru odsječka prijeđenog puta i odsječka vremena:

$$\overline{v}_2 = \frac{\triangle s}{\triangle t} = \frac{s(2)-s(1)}{2-1} = 17\frac{m}{s}.$$

c) Koje je geometrijsko značenje prosječne brzine? Od točke do točke omjer promjene puta i promjene vremena zapravo daje koeficijent smjera pravca kroz zadane dvije točke. Taj je pravac sekanta grafa funkcije.



d) Pitamo li se kako bismo odredili trenutnu brzinu tijela u određenom trenutku t_0. Odgovor jest: promatranjem limesa prosječne brzine $\overline{v}$ za sve manje i manje udaljenosti točaka, znači kad $\triangle t \to 0$. Sama trenutna brzina u trenutku t_0 odgovara koeficijentu smjera tangente T na graf funkcije u točki t_0:



Dakle,

$$v(t_0) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{s(t_0 + \triangle t) - s(t_0)}{\triangle t}.$$

Definicija 31 *Neka je zadana funkcija* $f : I \to \mathbf{R}$ *i* $x \in I$*. Kažemo da je funkcija* f **diferencijabilna (derivabilna)** *u točki* x *ako postoji realni broj*

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}.$$

Taj realni broj zove se **derivacija funkcije** f **u točki** x *i označava s* $f'(x)$*. Kažemo da je* f *derivabilna na* I *ako je derivabilna u svakoj točki* $x \in I$*. Tada je s* $x \mapsto f'(x)$ *zadana nova funkcija* $f' : I \to \mathbf{R}$ *,* **derivacija** *funkcije* f *na* I*.*

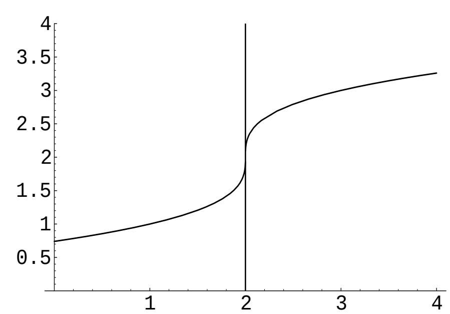
Koje je značenje vrijednosti $f'(x_0)$, vrijednosti derivacije funkcije f u točki x_0?

1. Ona opisuje nagib grafa funkcije f u zadanoj točki x_0. Po iznosu je $f'(x_0) = k$, koeficijentu smjera tangente na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$.
2. Derivacija f' funkcije f zadaje trenutnu veličinu promjene zavisne varijable $y = f(x)$ u odnosu na nezavisnu varijablu x.

Naravno, trenutnu veličinu promjene funkcije možemo interpretirati kao trenutnu brzinu, kao granični trošak (slijedi), ovisno o tome što opisuje početna funkcija f.

Ima slučajeva kad funkcija f u točki x nije diferencijabilna (derivabilna):

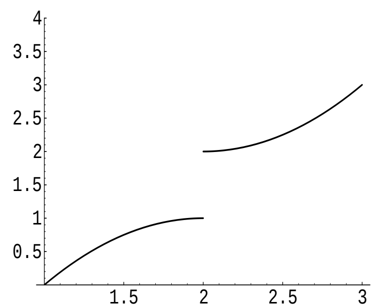
1. derivacija ne postoji u točki gdje limes nije konačan (nagib tangente na slici je beskončan):

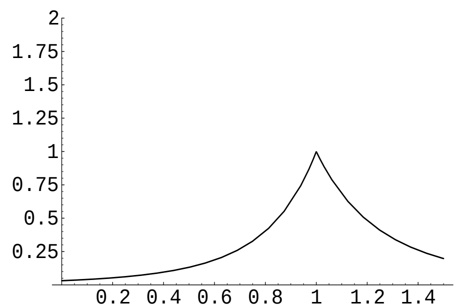


2. derivacija ne postoji u točki u kojoj limes nije jedinstven

$$\lim_{x \to a_-} f(x) \neq \lim_{x \to a_+} f(x)$$

što znači da funkcija ima skok (na slici je $a = 2$) ili šiljak (na slici za $a = 1$):





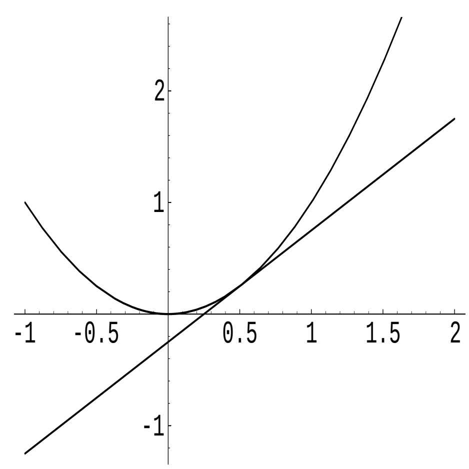
4.3 Derivacije elementarnih funkcija

Derivaciju f' derivabilne funkcije f određujemo po definiciji.

Primjer 76 *Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = x^2$ i interpretirajmo značenje vrijednosti $f'(\frac{1}{2})$.*
Računamo

$$\begin{aligned}
\lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x} &= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{(x+\triangle x)^2 - x^2}{\triangle x} = \\
&= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{x^2 + 2x\triangle x + (\triangle x)^2 - x^2}{\triangle x} = \\
&= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle x(2x + \triangle x)}{\triangle x} = 2x.
\end{aligned}$$

Dakle, funkcija $g(x) = 2x$ je derivacija funkcije $f(x) = x^2$. Pišemo $f'(x) = 2x$. Sad je $f'(\frac{1}{2}) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$. To znači da je koeficijent smjera tangente na graf funkcije $f(x) = x^2$ u točki $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ jednak 1. Tangenta je pravac $y = x - \frac{1}{4}$.



Vrijednosti derivacija elementarnih funkcija

1. Za konstantnu funkciju $f(x) = c$, $c \in \mathbf{R}$ je $f(x + \triangle x) - f(x) = c - c = 0$, znači $c' = 0$.
2. Za $n \in \mathbf{Q}$ i funkciju $f(x) = x^n$ je $f'(x) = nx^{n-1}$.
3. Derivacija eksponencijalne funkcije $f(x) = a^x$ $(a \neq 1, a > 0)$ je $f'(x) = a^x \ln a$. Posebno je $(e^x)' = e^x$.
4. Za $a \neq 1, a > 0$ i logaritamsku funkciju $f(x) = \log_a x$ je $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$. Posebno je $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Primjer 77 *Odredimo derivacije sljedećih elementarnih funkcija:* $f(x) = x^3$*,* $g(x) = \sqrt{x}$*,* $h(x) = \frac{1}{x^2}$*,* $r(x) = 2^x$ *i* $p(x) = \log x$*.*

Primijenimo gore naučeno.

Derivacija funkcije f *je* $f'(x) = 3x^2$*.*

Zapišemo li korijen kao potenciju, onda je $g(x) = x^{\frac{1}{2}}$*.* g *deriviramo po pravilu za derivaciju potencije:* $g'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$*.*

Budući je $h(x) = x^{-2}$*,* $h'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$*.*

Derivacija eksponencijalne funkcije r *je* $r'(x) = 2^x \ln 2$*.*

Derivacija logaritamske funkcije p *je* $p'(x) = \frac{1}{x \ln 10}$*.*

Pravila za računanje derivacija

Neka su f i g derivabilne funkcije.

1. Za funkciju $h = f \pm g$ je
$$h'(x) = (f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x).$$
2. Neka je $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Derivaciju funkcije h računamo po formuli
$$h'(x) = (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Posebno, ako je g konstantna funkcija, odnosno $g(x) = c$, $c \in \mathbf{R}$, imamo $(cf(x))' = cf'(x)$.

3. Ukoliko je funkcija h zadana kao kvocijent funkcija f i g, njenu derivaciju računamo po formuli
$$h'(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

4. Ako je funkcija h zadana kao kompozicija funkcija f i g, onda je
$$h'(x) = [(f \circ g)(x)]' = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Kad znamo derivacije potencija, eksponencijalnih i logaritamskih funkcija i pravila za računanje derivacija sume, razlike, produkta, kvocijenta ili kompozicije funkcija, možemo određivati i derivacije složenijih elementarnih funkcija.

Primjer 78 *Odredimo derivacije zadanih funkcija:*
a) $f(x) = x^2 + x^3$.

Deriviramo zasebno svaku potenciju koja tvori sumu pa je $f'(x) = (x^2)' + (x^2)' = 2x + 3x^2$.
b) $h(x) = xe^x$

Funkcija h je produkt dviju elementarnih funkcija pa je
$$h'(x) = x' \cdot e^x + x \cdot (e^x)' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x(1 + x).$$
c) $g(x) = 4 \ln x$

Funkciju g možemo tretirati kao produkt funkcija, dobivamo $g'(x) = 4 \cdot \frac{1}{x} = \frac{4}{x}$.
d) $r(x) = \frac{1+x}{1-x}$

Funkcija r je kvocijent dviju funkcija:
$$\begin{aligned} r'(x) &= \frac{(1+x)'(1-x) - (1+x)(1-x)'}{(1-x)^2} = \\ &= \frac{1(1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1 - x + 1 + x}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$
e) $p(x) = \ln(x^2 + x)$

Funkcija p je dobivena kompozicijom. Prema pravilu za derivaciju kompozicije (deriviramo prvo vanjsku funkciju (logaritam), zatim unutarnju (polinom)) je
$$p'(x) = [\ln(x^2 + x)]' \cdot (x^2 + x)' = \frac{1}{x^2 + x} \cdot (2x + 1) = \frac{2x + 1}{x^2 + x}.$$

4.4 Derivacije višeg reda

Derivaciju funkcije f' zovemo drugom derivacijom funkcije f. Drugu derivaciju funkcije f označavamo s f''. Dakle,

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Slično bismo definirali i derivacije viših redova.

Primjer 79 *Odredimo $f''(x)$ za funkciju $f(x) = \ln x$.*

Računamo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1}, \\ f''(x) &= -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

4.5 Granične veličine

U ekonomici je od značaja praćenje brzine promjene funkcija: troškova, ponude, potražnje i slično. Ekonomisti brzinu promjene veličina nazivaju imenom graničnost (marginalnost). Brzinu promjene funkcije daje derivacija funkcije pa pojam, primjerice graničnog troška podrazumijeva derivaciju pripadne funkcije ukupnog troška.

Primjer 80 *Odredimo granični trošak za zadanu (linearnu) funkciju ukupnog troška*

$$T(x) = 250 + 12x.$$

Granični trošak je $T'(x) = 0 + 12 \cdot 1 = 12$. Koje je značenje graničnog troška? Porast nezavisne varijable x za 1 uzrokuje stalan porast zavisne varijable $T(x)$ za 12.

Primjer 81 *Neka su ukupni troškovi proizvodnje (izraženi u stotinama kuna) x tisuća barela piva zadani funkcijom:*

$$T(x) = 36x^2 + 800x + 40000.$$

A) Odredimo funkciju graničnog troška: $T'(x) = 72x + 800$.
B) Odredimo granični trošak proizvodnje 5000 barela piva.
Kako se nezavisna varijabla uvrštava u tisućama barela, uzimamo da je $x = 5$. Onda je rezultat $T'(5) = 1160$. Kako interpretiramo rezultat? Nakon što je proizvedeno

5000 barela piva, trošak proizvodnje sljedeće jedinice, znači sljedećih tisuću barela piva procjenjuje se na 1160×100 *kn, dakle, na* 116000 *kn.*
C) Koliki je stvarni trošak proizvodnje sljedećih 1000 *barela piva na nivou proizvodnje* 5000 *barela piva? Dobit ćemo ga kao razliku troška proizvodnje* 6000 *barela umanjenog za trošak proizvodnje* 5000 *barela piva:*

$$\begin{aligned} T(6) - T(5) &= 36 \cdot 6^2 + 800 \cdot 6 + 40000 - (32 \cdot 5^2 + 800 \cdot 5 + 40000) = \\ &= 36(6^2 - 5^2) + 800(6 - 5) = 1196. \end{aligned}$$

Vidimo da je procjena (119600 *kn) dobivena funkcijom graničnog troška prilično dobra.*

. . . .
Zašto je važno praćenje graničnih troškova? Da bi se planirala proizvodnja! Ako granični troškovi proizvodnje dodatne jedinice proizvoda prelaze prihod od prodaje te jedinice, na povećanju proizvodnje neće se ostvarivati dobit već gubitak. Dakle, u tom se slučaju ne isplati povećavati proizvodnju.
. . . .

4.6 Zadatci

1. Odredite $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^{-x}} + 1$.
2. Odredite derivacije funkcija $f(x) = x \ln x, g(x) = \frac{x^2+3}{x}, h(x) = (2x+3)^4$.
3. Odredite derivacije funkcija:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 8x^2 + 9 \\ g(x) &= x - lnx \\ h(x) &= x - \frac{1}{x} \\ i(x) &= e^x - e^{-x} \\ j(x) &= \frac{x}{x+1} \\ k(x) &= \frac{e^x}{x-1} \\ l(x) &= (5x+3)e^{-2x} \\ m(x) &= ln(x^2+1) \\ n(x) &= e^{\frac{2x+3}{x-1}} \\ o(x) &= \frac{x}{ln(2-x)} \end{aligned}$$

4. Neka su ukupni troškovi (u kn) proizvodnje x jedinica jednog proizvoda jednaki

$$T(x) = 3x^2 + x + 500.$$

a) Koristeći funkciju graničnih troškova procijenite cijenu proizvodnje 41. jedinice.
b) Izračunajte stvarnu cijenu proizvodnje 41. jedinice.

5. Predviđa se da će naklada lokalnih novina u ovisnosti o vremenu t (u godinama) od početka izlaženja biti

$$N(t) = 100t^2 + 400t + 5000.$$

a) Kolika je početna naklada?
b) Procijenite koliko će se naklada povećati u prvih 6 mjeseci(!) prodaje.

6. Dane su funkcije ukupnih troškova i ukupnih prihoda

$$T(x) = 1500 + 80x,\ P(x) = 1400 - 6x^2$$

u ovisnosti o količini proizvodnje x.
a) Koliki su fiksni troškovi proizvodnje? Koliki je granični trošak?
b) Odredite funkciju dobiti $D(x)$. Procijenite dobit na razini količine proizvodnje $x = 10$ i $x = 100$. Da li porastom količine proizvodnje dobit raste ili pada?

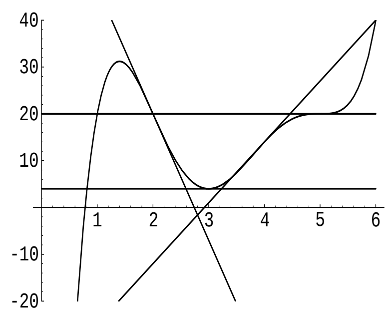
Poglavlje 5

Primjene derivacija

5.1 Primjene derivacija u analizi toka funkcije

5.1.1 Određivanje intervala rasta i pada funkcije

Primjer 82 *Odredimo jesu li vrijednosti derivacije funkcije f čiji je graf skiciran na slici u točkama $x = 2, 3, 4, 5$ pozitivne, negativne ili jednake* 0.



Kako ćemo to odrediti? Koristeći geometrijsko značenje derivacije. Vrijednost derivacije u točki jednaka je koeficijentu smjera tangente na graf krivulje u toj točki. Zamislimo da u svakoj od danih točaka povlačimo tangentu na graf funkcije. Treba vidjeti je li ona rastući (koeficijent smjera mu je pozitivan) ili padajući pravac (koeficijent smjera negativan). Na slici su nacrtane tangente na graf u točkama $x = 2, 3, 4, 5$. Vidimo:

$$f'(2) < 0, f'(3) = 0, f'(4) > 0, f'(5) = 0.$$

Teorem 6 *Neka je f derivabilna funkcija na intervalu $I \subseteq \mathcal{D}(f)$. Funkcija f raste na intervalu I ako i samo ako za sve $x \in I$ vrijedi $f'(x) \geq 0$. Funkcija f pada na intervalu I ako i samo ako za sve $x \in I$ vrijedi $f'(x) \leq 0$.*

Ukoliko su u teoremu nejednakosti u izrazima stroge, kaže se da funkcija na intervalu I strogo raste, odnosno strogo pada.

Definicija 32 *Ako je za neki $x_0 \in I$ $f'(x_0) = 0$, točku x_0 zovemo* **stacionarnom točkom** *funkcije f.*

Definicija 33 *Za funkciju $f : I \to \mathbf{R}$ kažemo da u točki $a \in I$ ima* **lokalni maksimum** *ako postoji $\delta > 0$ takav da*

$$(|x - a| < \delta) \Rightarrow (f(x) \leq f(a)).$$

Za funkciju f kažemo da u točki $a \in I$ ima **lokalni minimum** *ako postoji $\delta > 0$ takav da*

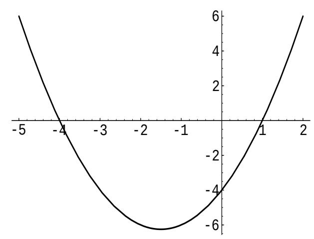
$$(|x - a| < \delta) \Rightarrow (f(x) \geq f(a)).$$

Kažemo da f u a ima **lokalni ekstrem** *ako u a ima lokalni maksimum ili lokalni minimum.*

Funkcija f ima u točki a lokalni minimum (maksimum) ako je $f(a)$ najmanja (najveća) vrijednost funkcije f u nekoj okolini točke a. U stacionarnoj točki funkcija može (prethodna slika za $x = 3$), ali i ne mora (slika za $x = 5$) imati lokalni ekstrem. Točnije funkcija f koja je diferencijabilna na intervalu $I =< a, b >$ u stacionarnoj točki $x_0 \in I$ ima lokalni ekstrem ako postoji $\delta > 0$ takav da vrijednosti derivacije u točkama iz intervala $< x_0 - \delta, x_0 >$ i onima iz intervala $< x_0, x_0 + \delta >$ nemaju isti predznak. Ako je $f'(x) > 0$ za sve $x \in< x_0 - \delta, x_0 >$ i $f'(x) < 0$ za sve $x \in< x_0, x_0 + \delta >$, onda f u točki x_0 ima lokalni maksimum. Ako je $f'(x) < 0$ za sve $x \in< x_0 - \delta, x_0 >$ i $f'(x) > 0$ za sve $x \in< x_0, x_0 + \delta >$, onda je točka x_0 točka lokalnog minimuma. Ukoliko derivacija ne mijenja znak u stacionarnoj točki, ona nije točka lokalnog ekstrema.

Primjer 83 *Zadana je funkcija $f(x) = x^2 + 3x - 4$. Odredimo interval na kome funkcija raste, u kojoj točki ima lokalni ekstrem te prirodu ekstrema. (Sve bismo ovo u konkretnom slučaju mogli odrediti i bez analize derivacije funkcije, jer je graf kvadratne funkcije parabola, a o njoj sve znamo. Međutim, cilj jest na ovom jednostavnom primjeru ilustrirati primjenu derivacije u analizi toka funkcije.)*
Odredimo derivaciju funkcije: $f'(x) = 2x+3$. Funkcija f raste na intervalu I na kome je $f'(x) > 0$ za sve $x \in I$. Dakle rješavamo nejednadžbu $2x + 3 > 0$. Dobivamo $x > -\frac{3}{2}$, znači funkcija f raste na intervalu $I =< -\frac{3}{2}, +\infty >$. Na $< -\infty, -\frac{3}{2} >$ funkcija f pada. Stacionarnu točku nalazimo rješavanjem jednadžbe $f'(x) = 0$; dobivamo $x =$

$-\frac{3}{2}$. Odredimo pripadnu y koordinatu stacionarne točke: $y = f(-\frac{3}{2}) = -\frac{25}{4}$. Budući da funkcija pada na $< -\infty, -\frac{3}{2} >$, a raste na intervalu $< -\frac{3}{2}, +\infty >$, zaključujemo da u točki $S(-\frac{3}{2}, -\frac{25}{4})$ ima lokalni minimum. Prema dobivenim podatcima možemo skicirati graf funkcije:

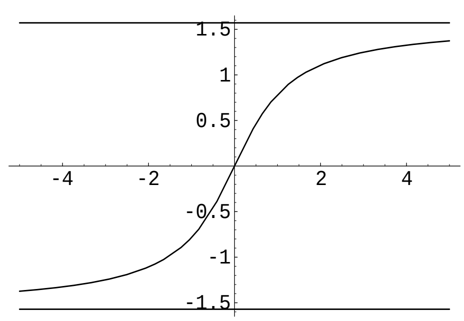


5.1.2 Geometrijsko značenje druge derivacije

Uzmimo da je funkcija f dva puta diferencijabilna na nekom intervalu I. Znamo da druga derivacija, f'', određuje brzinu promjene funkcije f'. Uz pomoć druge derivacije možemo provjeriti da li je graf funkcije konveksnog ili konkavnog oblika.

Konveksni i konkavni oblik grafa funkcije može se opisati **međusobnim položajem grafa funkcije i njegovih tangenti**. Graf funkcije je konveksnog oblika u okolini one točke u kojoj se nalazi iznad svoje tangente kojoj je diralište ta točka. Graf je konkavnog oblika u okolini one točke u kojoj se nalazi ispod svoje tangente. Točkom infleksije zovemo mjesto gdje graf funkcije mijenja oblik iz konveksnog u konkavni ili obratno.

Primjer 84 *Funkcija čiji je graf na slici*



je konveksna na intervalu $< -\infty, 0 >$, a konkavna na intervalu $< 0, +\infty >$. U $x = 0$ ima točku infleksije.

Formalna definicija konveksnosti i konkavnosti funkcije je kako slijedi.

Definicija 34 *Funkcija f je* **konveksna** *na intervalu I ako za sve $x_1, x_2 \in I$*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Funkcija f je **konkavna** *na intervalu I ako za sve $x_1, x_2 \in I$*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Teorem 7 *Neka je f diferencijabilna i f' diferencijabilna funkcija na intervalu I. Funkcija f je konveksna na intervalu I ako i samo ako je za sve $x \in I$ $f''(x) > 0$. Funkcija f je na intervalu I konkavna ako i samo ako je $f''(x) < 0$ za sve $x \in I$. Točka $x_0 \in I$ za koju je $f''(x_0) = 0$, a koja istodobno nije i točka lokalnog ekstrema je* **točka infleksije**.

Primjer 85 *Da li lokalni minimum funkcije f leži u intervalu na kome je f konveksna ili u intervalu na kome je f konkavna?*

Budući je tangenta na graf funkcije u točki lokalnog minimuma ispod grafa funkcije, lokalni minimum leži u intervalu na kome je funkcija konveksna. Ovaj nas zaključak upućuje na drugu metodu određivanja prirode ekstrema u stacionarnoj točki.

5.1.3 Lokalni ekstrem funkcije i derivacije višeg reda

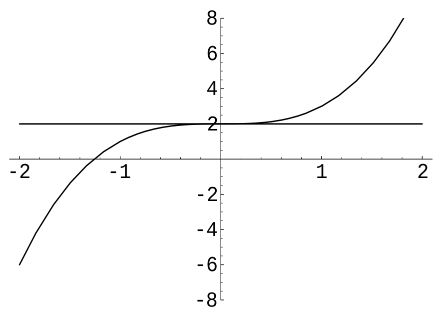
Neka je zadana dva puta derivabilna funkcija f. Slijedi opis postupka određivanja lokalnih ekstrema funkcije f.

1. Odredimo f'.
2. Riješimo jednadžbu $f'(x) = 0$. Svako rješenje x_0 dane jednadžbe je stacionarna točka funkcije (kandidat za ekstrem).
3. Odredimo drugu derivaciju funkcije f, dakle f''.
4. Računamo $f''(x_0)$ za svaku stacionarnu točku x_0. Ako je $f''(x_0) > 0$, u danoj točki funkcija ima lokalni minimum. Ako je $f''(x_0) < 0$, f u x_0 ima lokalni maksimum. Može se dogoditi da je i $f''(x_0) = 0$. U tom se slučaju određuju derivacije viših redova: $f'''(x), f^{iv}(x), ...$ te se određuju njihove vrijednosti u x_0. U računu dolazimo do derivacije nekog reda k takve da je $f^{(k)}(x_0) \neq 0$. Sada:
   (a) ako je broj k paran, u x_0 funkcija ima lokalni ekstrem (i to lokalni minimum ako je vrijednost pozitivna, lokalni maksimum ako je vrijednost negativna);

(b) ako je k neparan broj, funkcija u x_0 nema lokalnog ekstrema.

Primjer 86 *Provjerimo ima li funkcija $f(x) = x^3 + 2$ lokalnih ekstrema.*

Kad riješimo jednadžbu $f'(x) = 3x^2 = 0$, dobijemo stacionarnu točku $x = 0$. Uvrštavanjem $x = 0$ u drugu derivaciju $f''(x) = 6x$, dobivamo $f''(0) = 0$. Sad računamo derivacije viših redova: $f'''(x) = 6$. Onda je i $f'''(0) = 6$. Dobili smo vrijednost različitu od 0 u derivaciji neparnog reda. Zaključujemo da funkcija f u $x = 0$ nema lokalnog ekstrema.

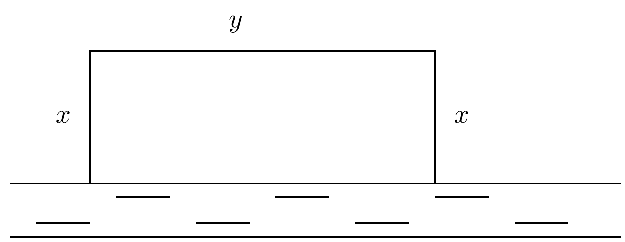


5.2 Primjena diferencijalnog računa na probleme optimizacije

U primjerima koji slijede radit ćemo s funkcijama koje su neprekidne na segmentu. O postojanju ekstrema takvih funkcija govori sljedeći teorem.

Teorem 8 (o ekstremnoj vrijednosti funkcije na segmentu)
Ako je funkcija neprekidna u svakoj točki segmenta $[a, b]$, tada ona ima i minimalnu i maksimalnu vrijednost na $[a, b]$. Ako je f derivabilna , one se postižu ili u stacionarnoj točki unutar segmenta ili u rubnim točkama segmenta.

Primjer 87 *Povrtlar ima 100 m (dužnih) žice za ograđivanje dijela zemljišta uz rijeku. Koju maksimalnu površinu zemljišta pravokutnog oblika može ograditi? Koje su točne dimenzije zemljišta za koje se postiže ta maksimalna površina?*



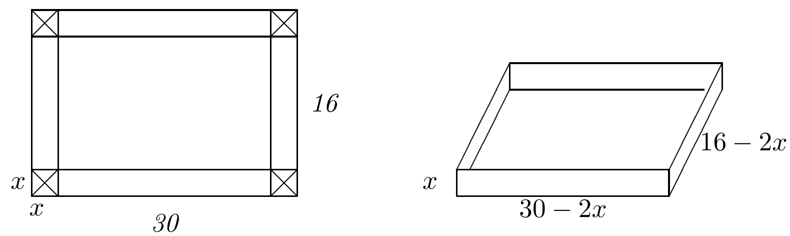
Označimo veličine kao na slici. Površina pravokutnika računa se kao $P(x, y) = x \cdot y$*. Površina je funkcija dviju varijabli. Međutim, kako imamo još podataka, možemo jednu varijablu izraziti preko druge. Izrazimo npr. varijablu* y *preko* x*. Znamo da je* $2x + y = 100$ *pa je* $y = 100 - 2x$*. Budući je* $0 \le y \le 100$*, onda je* $0 \le x \le 50$*. Znači tražimo ekstrem funkcije* p *zadane s*

$$p(x) = x(100 - 2x)$$

na segmentu $[0, 50]$*. Prema teoremu o ekstremnoj vrijednosti ekstrem na segmentu* $[0, 50]$ *postoji i postiže se ili u stacionarnoj točki unutar segmenta ili u rubnim točkama segmenta. Odredimo stacionarnu točku. Jednadžba* $p'(x) = 100 - 4x = 0$ *ima jedno rješenje* $x = 25$*. Ta vrijednost pripada segmentu* $[0, 50]$*. Vidimo da je* $p''(25) = -4 < 0$*. Znači, funkcija* p *poprima lokalni maksimum za* $x = 25$*. Pripadna vrijednost površine je* $p(25) = 1250$*, a pripadni* y *je* $y = 100 - 2 \cdot 25 = 50$*. Prema teoremu, treba još provjeriti da li se lokalni maksimum pojavljuje za vrijednosti* x *s ruba segmenta* $[0, 50]$*. Međutim, vidimo da je površina* p *za rubne vrijednosti jednaka* 0*, dakle, nije maksimalna:*

x	0	25	50
y	100	50	0
p	0	1250	0

Primjer 88 *Pravokutan komad kartona dimenzija* 30×16 *cm poslužit će za pravljenje kutije bez poklopca. Na svakom kutu kartona odreže se komad oblika kvadrata stranice* x*, a zatim se stranice saviju i podignu. Odredimo iznos veličine* x *za koji dobivena kutija ima maksimalan volumen. Koliki je maksimalni volumen?*



Odredimo dimenzije dobivene kutije. Duljina joj je $30-2x$, širina $16-2x$ i visina x. Svaka od dimenzija veća je ili jednaka 0. Stoga rubne vrijednosti x dobivamo rješavanjem sustava linearnih nejednadžbi

$$\begin{aligned} 30-2x &\geq 0 \\ 16-2x &\geq 0 \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Dobivamo da je $x \in [0,8]$. Zadatak je maksimizirati funkciju

$$V(x) = (30-2x)(16-2x)x = 4x^3 - 92x^2 + 480x$$

na segmentu $[0,8]$. Odredimo stacionarnu točku. Riješimo jednadžbu $V'(x) = 0$. Dobivamo $12x^2 - 184x + 480 = 0$, tj. $3x^2 - 46x + 120 = 0$. Rješenja ove kvadratne jednadžbe su

$$x_{1,2} = \frac{46 \pm \sqrt{(-46)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 120}}{6} = \frac{46 \pm 26}{6}.$$

Odavde je $x_1 = \frac{10}{3}, x_2 = 12$. Vrijednost 12 odbacujemo jer je van segmenta $[0,8]$. Budući je $V''(\frac{10}{3}) < 0$, točka $(\frac{10}{3}, 726)$ je točka lokalnog maksimuma. Provjerimo vrijednosti volumena za rubne vrijednosti od x:

x	0	$\frac{10}{3}$	8
V	0	726	0

Maksimalan volumen dobivene kutije je $726\,cm^3$.

Slijedi jedan primjer s funkcijama koje imaju ekonomsko značenje.

Osnovni princip granične analize

Neka su D, P, T redom funkcije dobiti, prihoda i ukupnog troška u ovisnosti o količini proizvodnje x. Funkcija dobiti D postiže maksimum za onu količinu proizvodnje x_0

za koju vrijedi:

1. $P'(x_0) = T'(x_0)$ (ekvivalentno zahtjevu da je $D'(x_0) = 0$) i
2. $T''(x_0) > P''(x_0)$ (zahtjev da je $D''(x_0) < 0$).

Primjer 89 *Proizvodnja nekog proizvoda ograničena je s* 80 *proizvoda dnevno. Neka su ukupni troškovi dnevne proizvodnje i dnevni prihod dani funkcijama:*

$$\begin{aligned} T(x) &= x^2 + 4x + 200 \\ P(x) &= 108x - x^2. \end{aligned}$$

Ako se svi proizvedeni proizvodi mogu i prodati, odredimo koliko jedinica proizvoda treba dnevno proizvoditi da bi dnevna dobit bila maksimalna.

Odredimo funkciju dobiti:

$$D(x) = P(x) - T(x) = (108x - x^2) - (x^2 + 4x + 200) = -2x^2 + 104x - 200.$$

Tražimo najveću vrijednost od D na segmentu $[0, 80]$. Prema osnovnom principu marginalne analize, stacionarnu točku dobivamo rješavanjem jednadžbe $108 - 2x = 2x + 4$. Rješenje je $x = 26$. Budući je i $2 = T''(26) > P''(26) = -2$, dobili smo točku lokalnog maksimuma funkcije dobiti D. Pripadna dobit je $D(26) = 1152$. Provjerimo još vrijednost funkcije D na rubovima segmenta:

x	*0*	*26*	*80*
$D(x)$	*-200*	*1152*	*-4680*

Vidimo da se za vrijednosti $x = 0$ i $x = 80$ ostvaruje se gubitak! Maksimalna dobit ostvaruje se pri dnevnoj proizvodnji 26 *jedinica proizvoda i iznosi* 1152 *kn.*

5.3 Zadatci

1. Skicirajte graf funkcije koja ima sljedeća svojstva:
   a)$f'(x) > 0$ za $x < 1$,
   b)$f'(x) < 0$ za $x > 1$,
   c)$f''(x) > 0$ za $x < 1$ i $x > 1$,
   d)$f(1)$ nije definirano.
2. Odredite interval na kome funkcija $f(x) = -3\ln(x^2 + 3) + 1$ raste.

3. U trošku proizvodnje x jedinica nekog proizvoda sudjeluju sljedeći troškovi
   -fiksan trošak od 1200 kn dnevno za plaće radnika
   -trošak proizvodnje od 1.2 kn za svaku proizvedenu jedinicu
   -trošak organizacije prodaje proizvoda u iznosu $\frac{100}{x^2}$.
   Izrazite ukupni trošak kao funkciju od x i odredite količinu proizvodnje za koju je on minimalan.

4. Prihod od prodaje x tona određenog proizvoda zadan je funkcijom
$$P(x) = 5 - \frac{48}{x} - 3x^2.$$
   a) Odredite količinu proizvodnje za koju je prihod maksimalan.
   b) Koja količina proizvodnje rezultira padom prihoda?

5. Zadana je funkcija dobiti (u kn) od prodaje x jedinica proizvoda:
$$D(x) = 4000 - (x - 20)^2.$$
   Procijenite dobit od prodaje 8. jedinice proizvoda. Kolika je stvarna dobit koja se ostvaruje prodajom 8. jedinice proizvoda?

6. Za koju vrijednost $x \in [-1, 4]$ je graf funkcije $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$ najstrmiji? Koliki je nagib tangente na graf u toj točki?

Poglavlje 6

Funkcije više varijabli

Primjer 90 *Izrazimo li površinu pravokutnika kao funkciju njegove duljine x i širine y, dobivamo*

$$P(x, y) = x \cdot y.$$

To je primjer funkcije dviju varijabli.

Definicija 35 *Funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathcal{K}$ je* **funkcija dviju varijabli** *ako je $\mathcal{D} \subseteq \mathbf{R}^2$.*

Dakle, funkcija dviju varijabli f zadaje pravilo po kojem uređenom paru $(x, y) \in \mathcal{D}$ pridružujemo jedinstvenu vrijednost $z = f(x, y) \in \mathcal{K}$.

Primjer 91 *Zadana je funkcija $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ kao $f(x, y) = 2x + 3y + 4$. Izračunajmo $f(0, 1), f(1, 0)$, i $f(1, -2)$.*

$$\begin{aligned} f(0,1) &= 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 4 = 7, \\ f(1,0) &= 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 4 = 6, \\ f(1,-2) &= 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 4 = 0. \end{aligned}$$

Definicija 36 **Prirodna domena** *$\mathcal{D}(f)$ funkcije dviju varijabli f je maksimalni podskup od $\mathbf{R}^2$ takav da je vrijednost funkcije $f(x, y)$ definirana za sve $(x, y) \in \mathcal{D}(f)$.* **Slika** *funkcije f je*

$$\mathcal{R}(f) = \{z : z = f(x, y), (x, y) \in \mathcal{D}(f)\} \subseteq \mathbf{R}.$$

Primjer 92 *Proizvođač proizvodi kalkulatore dva tipa: grafičke i obične. Grafički kalkulatori prodaju se po cijeni od* 240 *kn, obični po* 120 *kn po komadu. Odredimo funkciju prihoda u ovisnosti o broju prodanih kalkulatora pojedine vrste.*

Označimo s x *broj prodanih grafičkih kalkulatora, a s* y *broj prodanih običnih kalkulatora. Funkcija prihoda glasi*

$$P(x, y) = 240x + 120y.$$

Primjer 93 *Proizvodnja* Q *je funkcija uloženog kapitala* K *i veličine radne snage* L *(izražene u broju radnih sati).* **Cobb-Douglasova funkcija proizvodnje** Q *je funkcija sljedećeg izgleda*

$$Q(K, L) = aK^\alpha L^\beta,$$

gdje su $0 < \alpha, \beta < 1$ *i* $a > 0$ *realni brojevi, fiksni za određeni model proizvodnje.*

Primjer 94 *Kvocijent inteligencije mjeri se funkcijom*

$$I(m, s) = \frac{100m}{s},$$

gdje je s *starost osobe (izražena u godinama), a* m *njezina mentalna zrelost (mjere je testovi inteligencije). Izračunajmo* $I(16, 17)$.

Uvrstimo podatke i dobijemo:

$$I(16, 17) = \frac{1600}{17} \approx 94.11.$$

Koordinatni sustav u prostoru

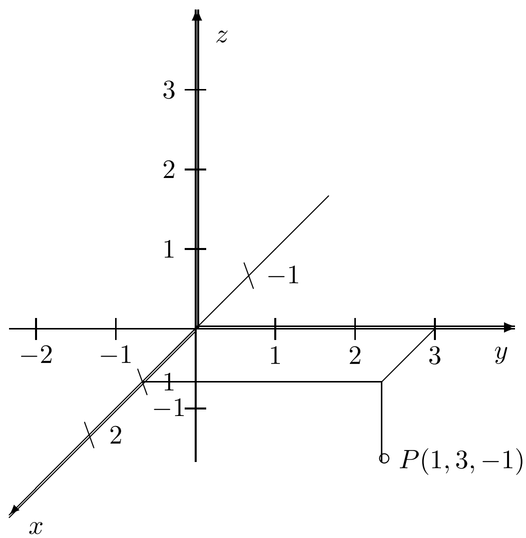
Koordinate se u trodimenzionalni prostor postavljaju uvođenjem triju međusobno okomitih **koordinatnih osi** (pravaca) x, y i z. Čitav trodimenzionalni prostor opisan je s

$$\mathbf{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbf{R}\}.$$

Svakoj točki u ravnini pridružena je uređena trojka (x, y, z) koordinata. Obratno, svakoj uređenoj trojci realnih brojeva pridružena je jedinstvena točka u $\mathbf{R}^3$. Parovi koordinatnih osi xy, xz i yz određuju **koordinatne ravnine**.

Primjer 95 *U koordinatni sustav u prostoru smjestimo točku* $P(1, 3, -1)$.

Koordinate točke opisuju udaljenost točke P *od koordinatnih ravnina, dakle imamo*



Graf funkcije dviju varijabli

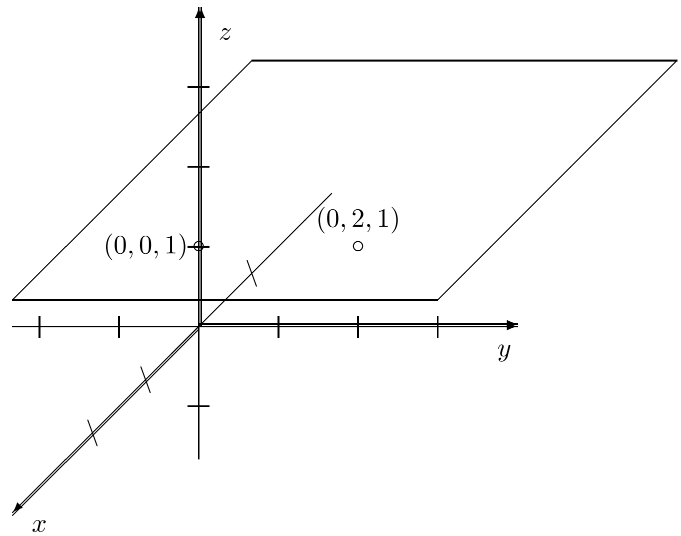
Definicija 37 **Graf** *funkcije dviju varijabli* f *je skup*

$$\Gamma_f = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathcal{D}(f)\}.$$

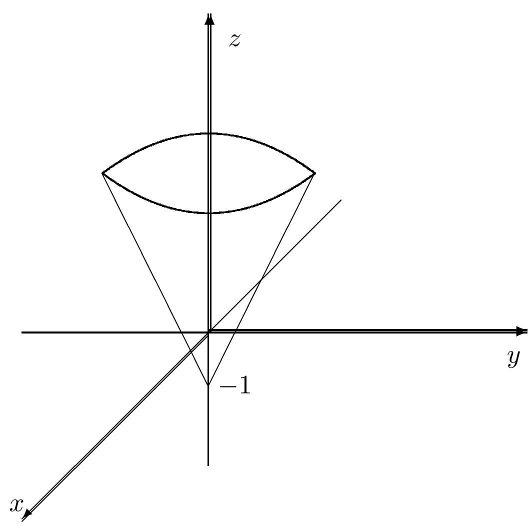
Graf funkcije dviju varijabli f je ploha u prostoru.

Primjer 96 *Skicirajmo u prostoru grafove funkcija:*

1. $f(x, y) = 1$
   Graf ove funkcije je skup svih točaka (x, y, z) *prostora za koje je* $z = 1$*, tj. skup svih točaka* $(x, y, 1)$ *pri čemu su* x*,* y *proizvoljni realni brojevi. Taj skup čini ravninu paralelnu s* xy *ravninom i smještenu na "visini"* $z = 1$*. Ta ravnina je, naravno, neomeđena:*



2. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$.
Pišemo $z = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$, *odnosno* $(z + 1)^2 = x^2 + y^2$. *Za fiksnu vrijednost* $z \geq -1$, *jednadžba zadaje kružnicu radijusa* $z + 1$. *Dakle, presjeci tražene plohe s ravninama paralelnima xy ravnini jesu kružnice. Ploha izgleda kao izokrenuti plašt stošca s vrhom u točki* $(0, 0, -1)$.



6.1 Parcijalne derivacije

Ako u funkciji dviju varijabli jednu varijablu držimo konstantnom, možemo promatrati promjenu funkcije u ovisnosti o promjeni druge varijable. Dakle, možemo derivirati funkciju po jednoj od varijabli držeći drugu varijablu konstantnom. Takvu derivaciju zovemo parcijalnom. Kod parcijalnih derivacija koristi se oznaka ∂ koju čitamo "parcijalno".

Definicija 38 *Neka je f funkcija dviju varijabli.* **Parcijalna derivacija** *funkcije f po varijabli x je*

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}.$$

Parcijalna derivacija funkcije f po varijabli y je

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}.$$

Zapise iz definicije čitamo "parcijalno f po x jednako je ...").

Ravnopravno uz oznaku navedenu u definiciji za parcijalnu derivaciju funkcije $z = f(x,y)$ po x, koriste još i oznake

$$\frac{\partial}{\partial x} z\,,\ f_x(x,y)\,,\ D_x(f(x,y)).$$

Slično je i za parcijalnu derivaciju funkcije f po varijabli y.

Ovdje ćemo za parcijalne derivacije funkcije $f(x,y)$ po varijablama x, y koristiti oznake $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$.

Primjer 97 *Odredimo parcijalne derivacije funkcije $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ po varijablama x i y.*

Kad računamo parcijalnu derivaciju funkcije f po varijabli x, varijablu y tretiramo kako bismo tretirali bilo koju konstantu (broj):

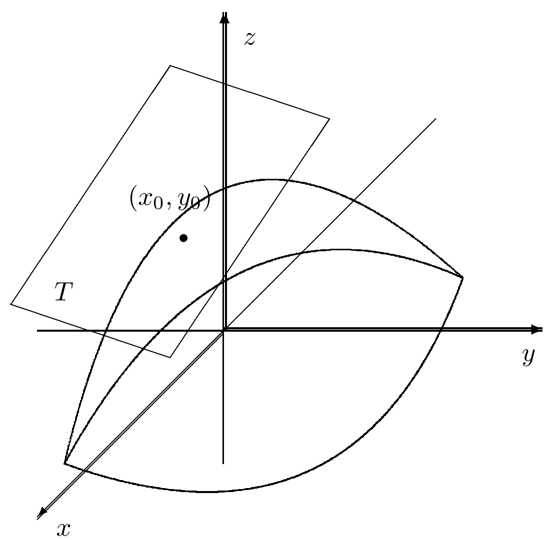
$$f_x(x,y) = 2x + y + 0 = 2x + y.$$

Pri računanju $f_y(x,y)$ deriviramo f po y, a x smatramo konstantom:

$$f_y(x,y) = 0 + x + 2y = x + 2y.$$

6.1.1 Geometrijsko značenje parcijalne derivacije

Neka je zadana ploha $z = f(x, y)$ u prostoru. Uzmimo točku $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ na plohi. Ima puno pravaca u prostoru koji su tangente na plohu u toj točki. Svi ti pravci leže u jednoj ravnini. Nju zovemo **tangencijalna ravnina** (T na slici). Vrijednost $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$ je koeficijent smjera točno one tangente iz tangencijalne ravnine T koja se nalazi u presjeku plohe $z = f(x, y)$ i ravnine $y = y_0$ (ravnina paralelna s xz ravninom). Možemo reći kako parcijalna derivacija funkcije $z = f(x, y)$ po varijabli x mjeri "brzinu promjene funkcije u smjeru x-osi". Slično, vrijednost $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$ je jednaka koeficijentu smjera one tangente iz T koja je presjek plohe $z = f(x, y)$ i ravnine $x = x_0$ (ravnina paralelna s ravninom yz). Parcijalna derivacija funkcije $z = f(x, y)$ po varijabli y mjeri "brzinu promjene funkcije u smjeru y-osi".



Primjer 98 *Tjedna proizvodnja (izražena u jedinicama proizvoda) nekog proizvodnog pogona zadana je funkcijom*

$$Q(x, y) = 1200x + 500y + x^2y - x^3 - y^2$$

za broj x uvježbanih radnika i broj y neuvježbanih radnika koji rade u tom pogonu. Trenutno u pogonu radi 30 *uvježbanih i* 60 *neuvježbanih radnika. Procijenimo graničnom analizom promjenu proizvodnje do koje dolazi dođe li u pogon još jedan uvježbani radnik, a broj neuvježbanih ostane isti.*

Promjenu proizvodnje u ovisnosti o broju x uvježbanih radnika mjeri $Q_x(x, y)$

$$Q_x(x, y) = 1200 + 2xy - 3x^2.$$

Vrijednost $Q_x(30, 60)$ daje procjenu promjene količine proizvodnje u ovisnosti o promjeni broja uvježbanih radnika za jednu malu jedinicu: $Q_x(30, 60) = 1200 + 2 \cdot 30 \cdot 60 - 3 \cdot 30^2 = 2100$. Možemo izračunati i stvarno povećanje tjedne proizvodnje uzrokovano dolaskom jednog uvježbanog radnika u pogon kao razliku $Q(31, 60) - Q(30, 60) = 2069$.

6.1.2 Parcijalne derivacije drugog reda

Za zadanu funkciju $z = f(x, y)$ označili smo parcijalne derivacije prvog reda kao

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y), f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y).$$

Svaku od dobivenih funkcija možemo dalje parcijalno derivirati po x i po y. Dobivamo ukupno četiri **parcijalne derivacije drugog reda**. Deriviramo li parcijalno f_x, dobivamo:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} f_x(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y), \\ f_{yx}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} f_x(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y). \end{aligned}$$

Deriviramo li parcijalno f_y, dobivamo

$$\begin{aligned} f_{xy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} f_y(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y), \\ f_{yy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} f_y(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y). \end{aligned}$$

Primjer 99 *Odredimo parcijalne derivacije drugog reda funkcije $f(x, y) = x \ln y$.*

Parcijalne derivacije prvog reda su:

$$f_x(x, y) = \ln y \, , \, f_y(x, y) = x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y} (= xy^{-1}).$$

Dalje deriviramo f_x parcijalno po x i po y:

$$f_{xx}(x, y) = 0, \ \ f_{yx}(x, y) = \frac{1}{y}.$$

(Funkcija f_x je obzirom na varijablu x konstantna, pa joj je parcijalna derivacija po x jednaka 0). Sada deriviramo funkciju f_y parcijalno po x i po y:

$$f_{xy}(x, y) = \frac{1}{y}, \ \ f_{yy}(x, y) = x \cdot (-1) y^{-2} = -\frac{x}{y^2}.$$

Primijetimo da je $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$.

Općenito vrijedi: ako su $f_{xy}(x,y)$ i $f_{yx}(x,y)$ neprekidne funkcije na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbf{R}^2$, onda su one jednake, tj. $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$, za sve $(x,y) \in I$.

6.2 Lokalni ekstremi funkcije dvije varijable

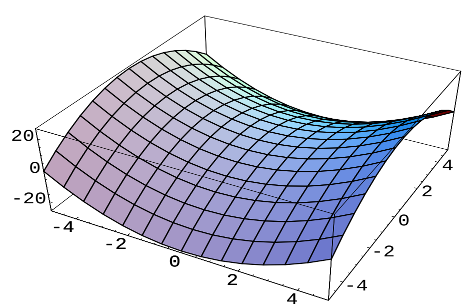
Važno je znati odrediti lokalne ekstreme funkcije dvije varijable.

Definicija 39 *Kažemo da funkcija $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ ima* **lokalni ekstrem** *(lokalni maksimum ili lokalni minimum) u točki (x_0, y_0) ako je $f(x_0, y_0)$ ekstremna (najveća ili najmanja) vrijednost funkcije f u neposrednoj okolini točke (x_0, y_0).*

Kao i kod funkcije jedne varijable, lokalni ekstrem funkcije dvije varijable može se javiti jedino u stacionarnoj točki. Točka (x_0, y_0) je **stacionarna točka** za funkciju $f(x,y)$ ako su vrijednosti parcijalnih derivacija funkcije f po varijabli x i po varijabli y u toj točki jednake 0:

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \;\; i \;\; f_y(x_0, y_0) = 0.$$

Ovo je zahtjev da koeficijenti smjera tangenti na krivulje dobivene presjekom plohe $z = f(x,y)$ s ravninama $x = x_0$ i $y = y_0$ budu jednaki 0. Stacionarna točka ne mora biti i mjesto lokalnog ekstrema, može biti tzv. sedlasta točka. To je slučaj kad je priroda ekstrema u smjeru x-osi različita od onog u smjeru y-osi. Ploha je u okolini sedlaste točke doslovce oblika sedla:



Koje su stacionarne točke ujedno i ekstremi te koja je priroda ekstrema otkriva se, kao i u slučaju funkcije jedne varijable, pomoću parcijalnih derivacija drugog i viših redova.

Test za lokalni minimum i maksimum funkcije više varijabli

Neka je (x_0, y_0) stacionarna točka funkcije f tj.

$$f_x(x_0, y_0) = 0 = f_y(x_0, y_0).$$

Računamo iznos

$$M = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2.$$

- Ako je $M > 0$, f u točki (x_0, y_0) ima lokalni minimum ili maksimum i to: lokalni minimum ako je $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, odnosno lokalni maksimum ako je $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$.
- Ako je $M < 0$, f nema lokalnog ekstrema u točki (x_0, y_0),
- Ako je $M = 0$, ne znamo bez daljnje analize ima li ili ne funkcija lokalni ekstrem u točki (x_0, y_0). Takve slučajeve nećemo ovdje razmatrati.

Primjer 100 *Odredimo i klasificirajmo stacionarne točke funkcije*

$$f(x, y) = x^3 - y^3 + 6xy.$$

U računima trebamo sve parcijalne derivacije funkcije do uključivo drugog reda. Odredimo ih:

$$\begin{array}{ll} f_x(x,y) = 3x^2 + 6y, & f_y(x,y) = -3y^2 + 6x, \\ f_{xx}(x,y) = 6x, & f_{xy}(x,y) = 6, \\ f_{yx}(x,y) = 6. & f_{yy}(x,y) = -6y. \end{array}$$

Odredimo stacionarne točke. Tražimo x i y koji su rješenja (nelinearnog) sustava od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 6y &= 0 \\ -3y^2 + 6x &= 0. \end{aligned}$$

Iz druge jednadžbe je $x = \frac{y^2}{2}$. Uvrstimo li to u prvu jednadžbu, dobivamo

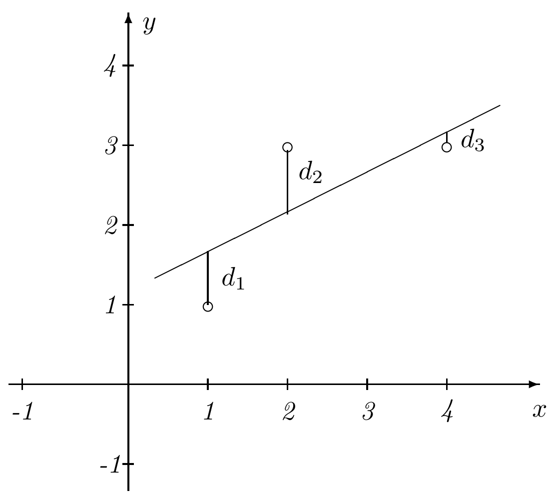
$$\begin{aligned} 3\left(\frac{y^2}{2}\right)^2 + 6y &= 0, \\ 3\frac{y^4}{4} + 6y &= 0, \\ 3y^4 + 24y &= 0, \\ 3y(y^3 + 8) &= 0, \end{aligned}$$

Odavde je $y_1 = 0$, $y_2 = -2$, pa je $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Dobivamo stacionarne točke $(0,0)$ i $(2,-2)$. Jesu li dobivene stacionarne točke i ekstremi?
Računamo vrijednost M u svakoj pojedinoj točki:

$$\begin{aligned} M(0,0) &= f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - [f_{xy}(0,0)]^2 = 0 \cdot 0 - 36 < 0, \\ M(2,-2) &= f_{xx}(2,-2)f_{yy}(2,-2) - [f_{xy}(2,-2)]^2 = 12 \cdot 12 - 36 > 0. \end{aligned}$$

Točka $(0,0)$ je sedlasta točka, nije ekstrem.Točka $(2,-2)$ je točka lokalnog ekstrema. Koji je ekstrem? Budući je $f_{xx}(2,-2) = 12 > 0$, funkcija u točki $(2,-2)$ ima lokalni minimum.

Primjer 101 *Odredimo jednadžbu regresijskog pravca za tri točke: $(1,1)$, $(2,3)$ i $(4,3)$.*



Neka je jednadžba regresijskog pravca $y = kx + l$. Označimo s d_1, d_2 i d_3 udaljenosti danih točaka od regresijskog pravca u smjeru y-osi. Za $x = 1$, pripadna y koordinata točke na pravcu jednaka je $y = k \cdot 1 + l = k + l$. Stoga je razlika y koordinata za prvu točku jednaka $d_1 = k + l - 1$. Slično bismo odredili d_2 i d_3. Dakle, imamo:

$$\begin{aligned} d_1 &= k + l - 1, \\ d_2 &= 2k + l - 2, \\ d_3 &= 4k + l - 3. \end{aligned}$$

Regresijski pravac tražimo prema metodi najmanjih kvadrata. Dakle, tražimo takve k i l da zbroj ${d_1}^2 + {d_2}^2 + {d_3}^2$ bude minimalan mogući. (Primijetite da nam nije važno jesu li vrijednosti d_i, $i = 1,2,3$ pozitivne ili negativne jer ih kvadriramo. Stoga je svejedno je uzima li se $d_1 = k + l - 1$ ili $d_1 = 1 - (k + l)$. Slično je i za d_2 i d_3).

Tražimo da zbroj kvadrata udaljenosti d_1, d_2, d_3 bude najmanji mogući tj.

$$S = {d_1}^2 + {d_2}^2 + {d_3}^2 \to min.$$

Dakle, imamo problem određivanja minimuma funkcije dviju varijabli:

$$S(k,l) = (k+l-1)^2 + (2k+l-2)^2 + (4k+l-3)^2.$$

Odredimo parcijalne derivacije funkcije $S(k,l)$:

$$\begin{aligned} S_k(k,l) &= 2(k+l-1) + 2(2k+l-2)\cdot 2 + 2(4k+l-3)\cdot 4 = 42k + 14l - 38, \\ S_l(k,l) &= 2(k+l-1) + 2(2k+l-2) + 2(4k+l-3) = 14k + 6l - 14. \end{aligned}$$

Tražimo stacionarnu točku. Uvjet je $S_k(k,l) = S_l(k,l) = 0$ pa rješavamo sustav

$$\begin{aligned} 42k + 14l &= 38, \\ 14k + 6l &= 14. \end{aligned}$$

Rješenje sustava je $k = \frac{4}{7}, l = 1$. Koordinate stacionarne točke su $(\frac{4}{7}, 1, \frac{3}{7})$. Parcijalne derivacije drugog reda su:

$$S_{kk}(k,l) = 42, S_{lk}(k,l) = 14, S_{kl}(k,l) = 14, S_{ll}(k,l) = 6.$$

Vidimo da su fiksne za svaku vrijednost k i l. Kako je $M(\frac{4}{7}, 1) = 42\cdot 6 - 14^2 > 0$, dobivena točka je mjesto lokalnog ekstrema funkcije. Budući je $S_{kk}(\frac{4}{7}, 1) = 42 > 0$, zaključujemo da funkcija $S(k,l)$ ima u točki $(\frac{4}{7}, 1)$ lokalni minimum. Jednadžba regresijskog pravca je $y = \frac{4}{7}x + 1$.

. . . .

Normalne jednadžbe koje smo koristili pri dobivanju jednadžbe regresijskog pravca u točki **2.4.2** dobivene su postupkom minimiziranja funkcije

$$S = {d_1}^2 + \cdots + {d_n}^2.$$

Funkcija S jednaka je zbroju kvadrata udaljenosti $d_i, i = 1, \ldots n$ svake od n točaka od regresijskog pravca (u smjeru y osi).

. . . .

6.2.1 Problem uvjetnog ekstrema

Kod određivanja uvjetnog ekstrema problem je sljedeći: odrediti točke koje optimiziraju funkciju $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ uz uvjet $g(x,y) = 0$.

Primjer 102 *Odredimo dva pozitivna broja čiji je produkt* 100*, a suma im je minimalna.*

Funkcija koju optimiziramo je $f(x,y) = x+y$. Traži se minimalna vrijednost funkcije f uz uvjet $g(x,y) = xy - 100$. (Funkcija g mora biti oblika $g(x,y) = 0$, pa smo uvjet $xy = 100$ zapisali u tom obliku). Da bismo problem riješili, promotrimo sljedeće.

Metoda Lagrangeovih multiplikatora u rješavanju problema uvjetnog ekstrema

Teorem 9 *Ako među svim točkama (x,y) koje zadovoljavaju uvjet $g(x,y) = 0$ funkcija $f(x,y)$ poprima najmanju ili najveću vrijednost u točki (x_0,y_0), onda postoji broj $\lambda \neq 0$ takav da je*

$$\begin{aligned} f_x(x_0,y_0) &= \lambda g_x(x_0,y_0), \\ f_y(x_0,y_0) &= \lambda g_y(x_0,y_0). \end{aligned}$$

Metodom Lagrangeovih multiplikatora odredimo ekstrem funkcije $f(x,y) = x+y$ za pozitivne vrijednosti x i y, uz uvjet $g(x,y) = xy - 100$.

Vrijednosti parcijalnih derivacija funkcija f i g su:

$$\begin{array}{ll} f_x(x,y) = 1 & g_x(x,y) = y \\ f_y(x,y) = 1 & g_y(x,y) = x. \end{array}$$

Teorem tvrdi da za ekstrem (x_0,y_0) vrijede jednakosti

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda \cdot x_0, \\ 1 &= \lambda \cdot y_0 \end{aligned}$$

za neki $\lambda \neq 0$. Lijeve strane jednadžbi su jednake, pa izjednačimo i njihove desne strane. Imamo da je $\lambda x = \lambda y$. Podijelimo jednadžbu s λ, pa dobivamo $x_0 = y_0$. Iz uvjeta znamo da je $x_0 y_0 = 100$. Slijedi da je $x_0 = y_0 = 10$. Među svim parovima (x,y) za koje je $xy = 100$ par $(10,10)$ je takav da je zbroj $x+y$ minimalan.

6.3 Zadatci

1. Zadana je funkcija $f(x,y) = 2x + 3y + 4$. Izračunajte $f(0,1)$, $f(1,0)$ i $f(1,-2)$.
2. Skicirajte u trodimenzionalnom koordinatnom sustavu ravninu 2x-3y+4z=12.

3. Površina kože (u m^2) koja prekriva čovjekovo tijelo približno je dana funkcijom

$$P(m,h) = 0.202m^{0.425}h^{0.725}$$

gdje je m masa čovjeka dana u kg, a h visina čovjeka dana u metrima. Odredite po ovoj formuli površinu kože na svom tijelu.

4. Zadana je Cobb-Douglasova funkcija proizvodnje:

$$Q(K,L) = AK^{\alpha}L^{\beta}.$$

Objasnite koje je značenje oznaka K i L i što opisuje funkcija $Q(K,L)$.

5. Odredite parcijalne derivacije prvog reda funkcija:
a) $f(x,y) = 10x^2 + 2xy + y^2$,
b) $f(x,y) = x \ln y^2$,
c) $f(x,y) = x^2 e^y + ye^x$.

6. Odredite parcijalne derivacije prvog reda funkcija:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= x^4 - 8x^2y + 9y^2\\
g(x,y) &= x - lny\\
h(x,y) &= xy - \frac{1}{x}\\
i(x,y) &= e^x - e^y\\
j(x,y) &= x^3 + 2xy^2 + y^3\\
k(x,y) &= e^x(y^2 + 2y)\\
l(x,y) &= (5x+3)e^{-2y}\\
m(x,y) &= ln(x^2 + y^2)\\
n(x,y) &= x^2e^y - y^2e^x\\
o(x,y) &= xln(2-y)
\end{aligned}$$

7. Odredite sve parcijalne derivacije drugog reda funkcija iz prethodnog zadatka.

8. Stupanj zagađenja nekog jezera zadan je funkcijom

$$Z(x,y) = \ln x + \ln y + 3xy,$$

gdje je x nađena količina (u mg) deterdženta, a y količina (u mg) metalnih soli u uzorku vode iz jezera. Odredite i objasnite značenje $Z_x(1,2)$, $Z_y(1,2)$. Povećanje kojeg onečišćivača rezultira manjim povećanjem zagađenja?

9. Odredite jednadžbu regresijskog pravca za točke $(0,-3), (1,-2), (2,3), (2,4), (3,3)$.

10. Ratar po hektaru zasijane pšenice troši x stotina kuna za rad i y stotina kuna za gnojivo. Dobit (u stotinama kn) sa jednog hektara površine zasijane pšenicom opisuje funkcija

$$D(x,y) = 6x - x^2 - y^2 + 4y - 4.$$

Koliko novaca treba potrošiti na troškove rada i gnojiva da bi mu dobit bila maksimalna? Koliko iznosi maksimalna dobit?

11. Zadana je funkcija

$$Q(K, L) = 10K^{1.2}L^{1.5}.$$

Kako zovemo $Q_K(K, L)$ i $Q_L(K, L)$? Odredite $Q_K(10000, 420)$ i $Q_L(10000, 420)$ i objasnite kakav zaključak donosite na temelju dobivenih vrijednosti.

12. Odredite sve parcijalne derivacije drugog reda funkcije

$$f(x, y) = y^2e^x + x^2y^2.$$

13. Odredite lokalne ekstreme funkcije dviju varijabli

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$$

14. Metodom Lagrangeovih multiplikatora odredite ekstrem funkcije $f(x, y) = x - y$ uz uvjet $x^2 + 3y^2 = 3$.

Poglavlje 7

Uvod u integralni račun

7.1 Pojam neodređenog integrala

Zadanoj derivabilnoj funkciju f znamo odrediti derivaciju f'. Pitanje je obrata: ako je zadana funkcija f, kako odrediti funkciju F takvu da je $F' = f$.

Primjer 103 *Koja je funkcija derivirana da se dobije* $f(x) = 2x$*?*

Možemo reći $F(x) = x^2$. *No, to nije jedini odgovor. Deriviranjem* $x^2+1, x^2-5, x^2+e, \ldots,$ *dobili bismo* $2x$. *Ukratko, za funkciju* $F(x) = x^2 + c$, $c \in \mathbf{R}$ *je* $F'(x) = 2x$.

Definicija 40 *Funkciju* $F : I \to \mathbf{R}$ *za koju je* $F' = f$ *zovemo* **primitivnom funkcijom** *funkcije* $f : I \to \mathbf{R}$.

Pokazuje se da svaka realna funkcija neprekidna na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbf{R}$ ima primitivnu funkciju na I. Skup svih primitivnih funkcija dane neprekidne funkcije f na intervalu I nazivamo **neodređeni integral** funkcije f na intervalu I. Pišemo

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

i čitamo "integral ef od iks de iks jednak je ...". Znači

$$\int 2xdx = x^2 + c \;\; jer \;\; je \;\; (x^2+c)' = 2x.$$

Primjer 104 *Odredimo* $\int e^x dx$.

$$\int e^x dx = e^x + c, \text{ jer je } (e^x + c)' = e^x.$$

Vrijednosti nekih neodređenih integrala

1. $\int 1 dx = x + c$,
2. $\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c,\ k \neq -1$,
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c,\ a > 0, a \neq 1$,
4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$.

Pravila za računanje neodređenih integrala:

1. Ako je f neprekidna funkcija na intervalu i $b \in \mathbf{R}, b \neq 0$, onda je
$$\int b f(x) dx = b \int f(x) dx.$$
2. Ako su f i g neprekidne funkcije na intervalu, onda je
$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

Znajući vrijednosti neodređenih integrala konstante, potencija, eksponencijalnih i logaritamskih funkcija, te pravila za računanje neodređenih integrala, možemo odrediti integrale funkcija koje su linearne kombinacije spomenutih funkcija.

Primjer 105 *Odredimo neodređene integrale:*

1. $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$,

2. $\int 3x dx = 3 \int x dx = 3\frac{x^2}{2} + c$,

3. $\int \frac{3}{x^2} dx = 3 \int x^{-2} dx = 3\frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{3}{x} + c$,

4. $\int (2x^3 + 3x^2) dx = 2 \int x^3 dx + 3 \int x^2 dx = 2\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} + c = \frac{x^4}{2} + x^3 + c$,

5. $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + c$,

6. $\int (2+x^2)^2 dx = \int (4+4x^2+x^4) dx = 4\int dx + 4\int x^2 dx + \int x^4 dx = 4x + 4\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + c$.

Primjer 106 *(Određivanje konstante kod integriranja) Granični trošak (u kn) neke proizvodnje opisan je funkcijom $T'(x) = x^2 + 3x$. Odredimo funkciju ukupnih troškova ako znamo da je fiksni trošak proizvodnje jednak 30 kn.*

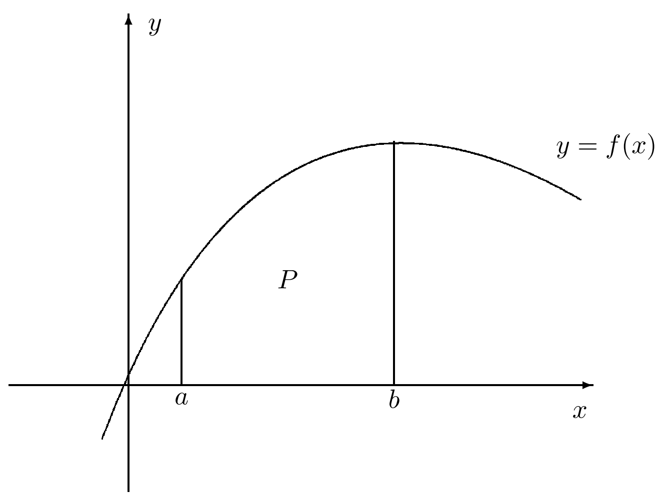
$$T(x) = \int T'(x)dx = \int (x^2 + 3x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + c.$$

Kako je fiksni trošak $T(0) = 30$, zaključujemo da je $c = 30$. Funkcija ukupnih troškova glasi

$$T(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 30.$$

7.2 Pojam određenog integrala

Neka je na segmentu $I = [a, b]$, za $a, b \in \mathbf{R}, a < b$, zadana neprekidna, nenegativna funkcija f. Pitamo se kolika je površina P lika kojega s x-osi zatvara graf funkcije f na segmentu $[a, b]$:

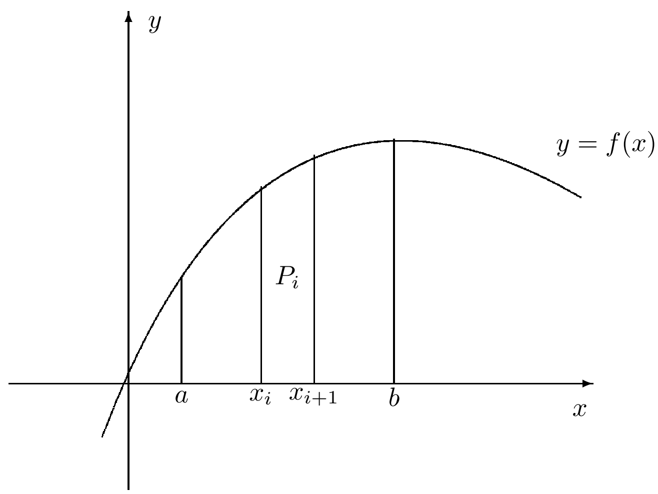


Budući je f neprekidna na $[a, b]$, ona na $[a, b]$ poprima minimalnu vrijednost m i maksimalnu vrijednost M. (Za funkciju kojoj je graf kao na slici je $m = f(a), M =$

$f(b)$). Grubu procjenu vrijednosti površine P možemo odmah dati:

$$m(b-a) \leq P \leq M(b-a).$$

Za finiju procjenu vrijednosti površine, radimo sljedeće. Segment $[a, b]$ podijelimo na n podsegmenata $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ pri čemu je $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1} = b$.



Dobiveni skup segmenata zovemo subdivizijom segmenta I. Na svakom od segmenata $[x_i, x_{i+1}]$ je funkcija f neprekidna, pa postoji minimum m_i i maksimum M_i funkcije f na njemu. Stoga za površinu P_i ispod grafa funkcije f na segmentu $[x_i, x_{i+1}]$ vrijedi:

$$m_i(x_{i+1} - x_i) \leq P_i \leq M_i(x_{i+1} - x_i).$$

Primjetimo da za svaki $x_0 \in [x_i, x_{i+1}]$ vrijedi

$$m_i(x_{i+1} - x_i) \leq f(x_0)(x_{i+1} - x_i) \leq M_i(x_{i+1} - x_i).$$

Sumu

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_{i+1} - x_i)$$

zovemo donja integralna suma. Sumu

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_{i+1} - x_i)$$

zovemo gornja integralna suma. Za svaku subdiviziju intervala I (odabir broja podsegmenata i točaka x_i koje su rubovi podsegmenata od I) točno su određene integralne sume s i S. Integralne sume imaju sljedeća važna svojstva:

1. Ako subdiviziju profinimo, tj. točkama $x_1, \ldots, x_{n+1}$ dodamo još točaka iz I, dobivamo novu subdiviziju i njoj pridružene sume s' i S'. Vrijedi $s \leq s'$ i

$S' \leq S$, odnosno profinjenjem subdivizije donje integralne sume ne padaju niti gornje rastu.

2. Svaka je donja integralna suma manja od bilo koje gornje integralne sume.

Skup svih donjih integralnih suma s_I koje dobivamo za razne subdivizije od I je ograničen odozdo i odozgo. Isto je slučaj i za skup S_I svih gornjih integralnih suma. Najveću gornju granicu skupa svih donjih integralnih suma, odnosno $\sup s_I$ zovemo donji Riemanov integral. Najmanju gornju granicu skupa svih gornjih integralnih suma, odnosno $\inf S_I$ zovemo gornji Riemanov integral. Tražena površina je "u-kliještena" između dviju spomenutih granica.

Definicija 41 *Za ograničenu funkciju $f : I \to \mathbf{R}$ kažemo da je* **integrabilna** *na I ako je $\sup s_I = \inf S_I$. Broj $\sup s_I = \inf S_I$ zovemo* **Riemanov integral** *ili* **određeni integral** *funkcije f na $I = [a, b]$ i bilježimo ga s*

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Zapis iz definicije čitamo: "integral od a do b ef od iks de iks". Rubove a, b segmenta $[a, b]$ zovemo donjom, odnosno gornjom granicom određenog integrala. Vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 10 *Ako je neprekidna na I, onda je ona integrabilna na I.*

Određeni integral neprekidne, nenegativne funkcije $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ je po iznosu jednak površini koju s x-osi zatvara graf funkcije f na segmentu $[a, b]$. Činjenica da za neprekidnu funkciju f na $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx$$

postoji, ne upućuje na to kako da dani integral izračunamo. O tome govori osnovni teorem integralnog računa, tzv. Newton-Leibnizova formula.

Neka je f neprekidna funkcija na $I = [a, b]$. Teorem 10 kaže da je ona integrabilna na $[a, b]$, no onda je integrabilna i na $[a, x]$ za $x \in [a, b]$. Dakle, postoji funkcija Φ zadana s

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Pokazuje se da je derivacija funkcije Φ po x jednaka baš $f(x)$, pa je Φ primitivna funkcija za f. Bilo koja druga primitivna funkcija F za f razlikuje se od Φ za konstantu c tj. $\Phi(x) = F(x) + c$. Kako je $\Phi(a) = 0$ (očito je $\int_a^a f(x)dx = 0$), imamo da je $F(a)+c=0$, odakle je $c=-F(a)$. Dakle, $\Phi(x)=F(x)-F(a)$ za sve $x\in[a,b]$. Posebno je $\Phi(b)=F(b)-F(a)$ za neku primitivnu funkciju F od f. Dobili smo osnovni teorem integralnog računa ili Newton-Leibnitz-ovu formulu:

Teorem 11 *Neka je f integrabilna funkcija na $[a,b]$. Tada je za primitivnu funkciju F od f*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$

Dakle, određeni integral mjeri površinu P lika kojega graf neprekidne, nenegativne funkcije f zatvara s osi x na segmentu $[a,b]$. Površina lika omeđenog krivuljom $y=f(x)$ i osi x te pravcima $x=a$ i $x=b$ računa se po formuli

$$P=\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a),$$

gdje je F primitivna funkcija funkcije f. Određivanje površine se, dakle, svodi na pronalaženje primitivne funkcije zadanoj te računanje razlike vrijednosti primitivne funkcije u gornjoj i donjoj granici segmenta po kojem integriramo.

Primjer 107 *Odredimo*

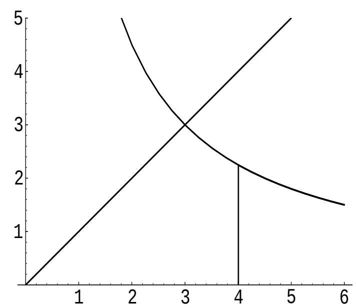
$$\int_0^1 x^3 dx.$$

$$\int_0^1 x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1^4}{4}-\frac{0^4}{4}=\frac{1}{4}.$$

Zapis $\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1$ *koristimo da naglasimo do od vrijednosti primitivne funkcije u gornjoj granici (*1*) oduzimamo vrijednost primitivne funkcije u donjoj granici (*0*).*
Dakle, površina koju graf funkcije $f(x)=x^3$ zatvara s x osi na segmentu $[0,1]$ jednaka je $\frac{1}{4}$ kvadratne jedinice.

Primjer 108 *Odredimo površinu koju na segmentu $[0,4]$ s x-osi zatvaraju krivulje $y=x$ i $y=\frac{9}{x}$.*

(Nacrtani su samo dijelovi krivulja u prvom kvadrantu jer tamo računamo površinu). Da dobijemo koordinate sjecišta krivulja, rješavamo jednadžbu $x=\frac{9}{x}$. Rješenja su $x_1=3$ i $x_2=-3$. x_2 odbacujemo budući ne leži u segmentu $[0,4]$. Za x_1 je pripadni $y_1=3$. Dakle, u prvom kvadrantu je sjecište krivulja točka $(3,3)$. Primijetimo na slici da ćemo ukupnu površinu P ispod krivulja odrediti kao zbroj dviju površina.



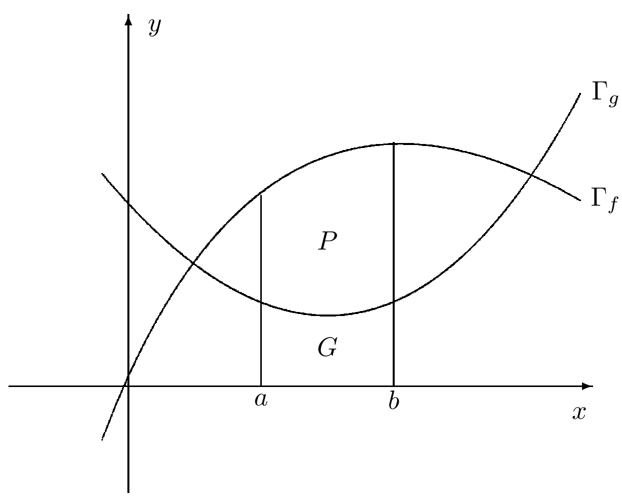
Na segmentu $[0,3]$ *ukupnoj površini doprinosi površina ispod krivulje* $y = x$*, a na segmentu* $[3,4]$ *površina ispod grafa* $y = \frac{9}{x}$*. Zato ukupnu površinu* P *računamo kao*

$$P = \int_0^3 x dx + \int_3^4 \frac{9}{x} dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^3 + 9\ln|x|\Big|_3^4 = \frac{9}{2} + 9\ln 4 - 9\ln 3 = 9(\frac{1}{2} + \ln\frac{4}{3}).$$

7.3 Primjena integralnog računa

7.3.1 Određivanje površine između dvije krivulje

Neka su zadani grafovi realnih, nenegativnih i ograničenih funkcija f i g. Koju površinu zatvaraju grafovi na segmentu $[a,b]$? Pogledajmo na slici.



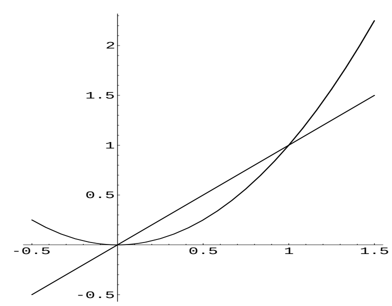
Tražena površina označena je oznakom P. Kako ćemo je odrediti? Znamo da je površina koju graf funkcije f zatvara s x-osi na segmentu $[a,b]$ jednaka $\int_a^b f(x)dx =$

$P + G$. Površina koju graf funkcije g zatvara s x-osi na segmentu $[a, b]$ jednaka je $\int_a^b g(x)dx = G$. Onda je površina koju zatvaraju krivulje Γ_f i Γ_g jednaka $P = (P + G) - G$.

Općenito, neka su f i g realne, nenegativne i ograničene funkcije na segmentu $[a, b]$ takve da je $f(x) \geq g(x)$ za svaki $x \in [a, b]$. Tada je površina P koju na segmentu $[a, b]$ zatvaraju krivulje $y = f(x)$ i $y = g(x)$ jednaka

$$P = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

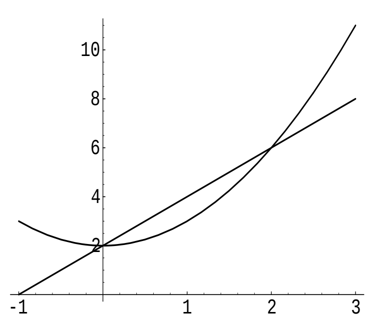
Primjer 109 *Odredimo površinu geometrijskog lika koji je na segmentu* $[0, 1]$ *omeđen krivuljama* $y = x^2$ *i* $y = x$ *.*



Na segmentu $[0, 1]$ *je graf funkcije* $y = x$ *iznad grafa funkcije* $y = x^2$*, pa je*

$$P = \int_0^1 (x - x^2)dx = \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 - \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Primjer 110 *Odredimo površinu koju zatvaraju krivulje* $y = x^2 + 2$ *i* $y = 2x + 2$*.*



Kad riješimo jednadžbu $x^2 + 2 = 2x + 2$*, dobivamo* $x_1 = 0$*,* $x_2 = 2$*. Dobili smo rubove segmenta po kojem integriramo. Na segmentu* $[0, 2]$ *pravac* $y = 2x + 2$ *je iznad* *parabole $y = x^2 + 2$. Stoga računamo*

$$P = \int_0^2 [(2x+2) - (x^2+2)]dx = \int_0^2 (2x - x^2)dx = \left(\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = 2^2 - \frac{2^3}{3} = \frac{4}{3}.$$

7.3.2 Primjena integralnog računa u graničnoj analizi

Znamo da je

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

za primitivnu funkciju F ($F' = f$) zadane funkcije f. Znači da je

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Dakle, integriramo li derivaciju funkcije f od a do b, iznos tog određenog integrala je jednak promjeni vrijednosti funkcije kod promjene nezavisne varijable x od a do b.

Primjer 111 *Odredimo koliki je prihod od prodaje* 15 *jedinica proizvoda ako je funkcija graničnog prihoda (izraženog u kn) od prodaje x jedinica proizvoda zadana s*

$$P'(x) = 100 + 4x - x^2.$$

$$\begin{aligned} P(15) &= P(15) - P(0) = \int_0^{15} P'(x)dx = \left(100x + \frac{4x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{15} = \\ &= 100 \cdot 15 + 2 \cdot 15^2 - \frac{15^3}{3} = 1625. \end{aligned}$$

7.4 Zadatci

1. Odredite
   a) $\int(-x+3)dx$

   b) $\int(x^2 - 2x)dx$

   c) $\int(x+3)^2dx$

d) $\int \frac{20}{x} dx$

e) $\int \frac{x-1}{x} dx$. (rastavite!)

2. Graničnu dobit kioska brze prehrane opisuje funkcija $D'(x) = -2x + 20$, gdje je x količina prodaje izražena u stotinama komada. Odredite funkciju dobiti ako znamo da kiosk ostvaruje gubitak od 50 kn ukoliko ništa ne proda.

3. Odredite površinu koju s x-osi zatvara graf funkcije $f(x) = 4 - x^2$ na intervalu $[0, 1]$

4. Odredite površinu lika kojeg zatvaraju krivulje $y = x + 2$ i $y = 4 - x^2$.

5. Skicirajte i odredite površinu koju zatvaraju krivulje $y = 4$ i $y = 5 - x^2$.

6. Skicirajte i odredite površinu koju zatvaraju krivulje $y = 1$ i $y = x^2$ na segmentu $[1, 2]$.

7. Skicirajte i odredite površinu lika kojega u ravnini omeđuju sljedeće tri krivulje: $y = x^2$, $y = x + 2$ i $y = 1$.

8. Rast dnevne dobiti (u stotinama kn) tvrtke opisuje funkcija

$$B(x) = 100 - x$$

gdje je x broj dana od kada je tvrtka pokrenula posao.
a) Odredite ukupnu dobit tvrtke u prvih 10 dana.
b) Odredite dobit između 10. i 20. dana poslovanja tvrtke.

9. Granični trošak proizvodnje x jedinica proizvoda zadan je funkcijom

$$T'(x) = 50 + 0.4x.$$

Ako je trenutna proizvodnja 10 jedinica dnevno, odredite koliko će veći biti trošak proizvodnje 20 jedinica dnevno.

Poglavlje 8

Dodatak

Uvod u poslovnu matematiku, 1. ispit znanja

1. Koliki iznos valja uplaćivati u banku početkom svake godine ako se na kraju 8. godine štednje na osnovu tih uplata želi raspolagati iznosom od 70000 kn. Obračun kamata godišnji, složen i dekurzivni uz fiksni godišnji kamatnjak $p = 8.8$.

2. Netko danas položi u banku 150000kn. Koliki bi se nominalno jednaki godišnji iznosi mogli na osnovu tog pologa isplaćivati u idućih 8 godina ako banka obračunava 6% godišnjih kamata, a obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan?

3. Zajam od 400000 kn odobren je poduzeću na 7 godina uz 7.5% godišnjih kamata i otplaćuje se nominalno jednakim anuitetima krajem godine. Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan. Odredite iznos nominalno jednakog godišnjeg anuiteta. Izradite otplatnu tablicu.

4. Zadane su matrice
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$
Odredite AB i BA.

5. Odredite inverznu matricu zadanoj:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

6. Izračunajte determinantu
$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

7. Gaussovom metodom riješite zadani sustav linearnih jednadžbi
$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & +3z & = & -2 \\ x & -5y & +4z & = & -3 \\ 2x & +3y & -4z & = & 1. \end{array}$$

8. Gaussovom metodom riješite zadani sustav linearnih jednadžbi
$$\begin{array}{rrrcr} x & -y & +z & = & 1 \\ 3x & -y & +2z & = & 8 \\ 2x & +3y & -z & = & 15. \end{array}$$

9. Podatci daju informaciju o prosjeku ocjena studenta tokom studija i početnoj plaći po njihovom stupanju na posao (u USD):

prosjek ocjena	2.90	3.81	3.20	2.42	3.94	2.05	2.25
plaća	23	28	23	21	32	19	22

Odredite na osnovu danih podataka odredite jednadžbu pravca regresije.

10. Zadana je matrica tehnologije:
$$\begin{pmatrix} 1 & -0.1 & -0.2 \\ -0.3 & 0.8 & -0.4 \\ -0.2 & -0.3 & 0.9 \end{pmatrix}.$$

Odredite matricu tehničkih koeficijenata.

11. Sastavite tabelu ulaza-izlaza ako je matrica tehnologije ekonomije zadana kao u prethodnom zadatku, a dana je i matrica ukupnih izlaza $\begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}$.

12. Za zadane matrice tehničkih koeficijenata i finalne potražnje, odredite matricu ukupnih izlaza:
$$T = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

13. Grafički odredite skup rješenja sustava linearnih nejednadžbi:
$$\begin{array}{rcl} x - y & \geq & 2 \\ x \geq 4 & , & y \geq 1 \\ x \geq 0 & , & y \geq 0. \end{array}$$

14. Postavite problem linearnog programiranja za slijedeći slučaj i riješite ga: Pekar proizvodi žuti i bijeli kolač. Za pečenje kilograma žutog kolača treba 1/4 kg brašna i 1/4 kg šećera, a za pečenje kilograma bijelog kolača troši se 1/3 kg brašna i 1/3 kg šećera. Pekar na zalihama ima 100 kg brašna i 80 kg še ćera. Ako 1 kg žutog kolača prodaje po 30 kn, 1 kg bijelog po 25 kn, koliko kg pojedine vrste kolača mora pekar proizvesti da bi mu prihod bio maksimalan?

15. Riješite grafički sljedeći problem linearnog programiranja:

$$2x + 3y = min$$

$$\begin{array}{rrcc} -2x & +3y & \leq & 6 \\ 3x & +4y & \geq & 12 \\ x \geq 0, & y \geq 0, & . & \end{array}$$

Uvod u poslovnu matematiku, 2. ispit znanja

1. Troškovi (u kn) proizvodnje x jedinica određenog proizvoda zadani su funkcijom

$$T(x) = 20x + 100.$$

a) Koliki je fiksni trošak proizvodnje?
b) Neka se jedan proizvod prodaje po cijeni od 24 kn. Kako glasi funkcija prihoda?
c) Odredite mjesto izjednačenja (prihod=trošak).

2. Otkriveno je da broj komaraca (u milijunima) na određenom mjestu ovisi o količini padalina (u dm/m^2) u mjesecu lipnju kao

$$M(x) = 10x - x^2.$$

Koliki će biti broj komaraca ako je u lipnju palo $2dm/m^2$ kiše? Za koje količine oborina razmnožavanje komarace neće biti moguće?

3. Skicirajte graf funkcije $f(x) = 2^{2x}$.

4. a) Izračunajte: $\log 1000, \log_{1/2} 4, \ln e^3, \log_3 81, \log 0.00001$.
b) Riješite jednadžbe: $e^{2x} = 4, e^{x+1} = 2, \ln(2x-1) = 0, \log_3 x = 2$.

5. Odredite derivaciju funkcije $f(x) = \ln(x^3 + x^2)$.

6. Odredite inverznu funkciju funkcije $f(x) = e^{\frac{x+3}{x-2}}$.

7. Odredite $\lim_{x\to\infty}(4 + 2e^{-x})$.

8. a) Na kojem intervalu funkcija $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$ raste? b) Locirajte i klasificirajte stacionarne točke. c) Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije u točki s apscisom 0.

9. Dobit (u kn) od prodaje x automobila mjesečno je

$$D(x) = -x^2 + 2000x.$$

Koliko automobila mora mjesečno biti prodano da bi dobit bila maksimalna? Kolika je maksimalna dobit?

10. Koliko je minimalno metara žice potrebno za ograđivanje zemljišta oblika pravokutnika i površine $100m^2$? Kolika je cijena ograđivanja ako je cijena dužnog metra žice 18 kn?

Uvod u poslovnu matematiku, 3. ispit znanja

1. Skicirajte u trodimenzionalnom sustavu ravninu $2x + 3y + 4z = 12$.

2. Funkcija
$$Q(K, L) = 50K^{1/2}L^{3/4}$$
opisuje mjesečnu proizvodnju u ovisnosti o količini kapitala K (u stotinama kn) i veličine rada L mjerenog u broju radnih sati mjesečno.
a) Kako zovemo takvu funkciju?
b) Odredite graničnu proizvodnju rada i graničnu proizvodnju kapitala na razini ulaganja kapitala od 10000 kn i 400 mjesečnih radnih sati.
c) Što rezultira većim povećanjem proizvodnje, povećanje kapitala ili rada?

3. Odredite sve parcijalne derivacije drugog reda funkcije
$$f(x, y) = -4x^3 - 3x^2y^3 + 2y^2.$$

4. Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = 9xy - x^3 - y^3 - 6$.

5. Odredite minimum funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2$ uz uvjet $x + y = 20$.

6. Skicirajte i odredite površinu koju zatvaraju krivulje $y = 1$ i $y = x^2$ na segmentu $[1, 2]$.

7. Rast dnevne dobiti (u stotinama kn) tvrtke opisuje funkcija
$$B(x) = 100 - x$$
gdje je x broj dana od kada je tvrtka pokrenula posao.
a) Odredite ukupnu dobit tvrtke u prvih 10 dana.
b) Odredite dobit između 10. i 20. dana poslovanja tvrtke.

Uvod u poslovnu matematiku - primjer pismenog ispita

1. Ulažemo novac u banku. Zanima nas za koliko će se godina glavnica koju smo uložili udvostručiti ako se kamata od 3.6% obračunava kvartalno, složeno i dekurzivno?

2. Matričnom metodom riješite sustav:

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 2 \\ x + 3y + 2z &= 1 \\ x + y + z &= 2 \end{aligned}$$

3. Sljedeća tablica opisuje ovisnost prinosa riže(u tonama po hektaru) o količini resursa koje zemljoposjednik potroši po hektaru usjeva.

količina resursa (u tisućama kuna)	2	3	5	7	10
prinos(u tonama)	6	6.5	7	8	9.5

Na osnovu pravca linearne regresije procijenite koliki će biti prinos riže ukoliko zemljoposjednik potroši 8000 kn po hektaru?

4. Grafički riješite sljedeći problem linearnog programiranja:

$$\begin{array}{ccc} 2x + 5y & \rightarrow & max \\ y \text{ - } 2x & \geq & \text{-}6 \\ y \text{ - } x & \leq & \text{-}1 \\ x \geq 0 & , & y \geq 0 \end{array}$$

5. Odredite sljedeće integrale:

   a) $\int(3e^x + 1)dx$.

   b) $\int_2^3(3x - x^2)dx$.

6. Zadane su funkcije ukupnih troškova i prihoda od proizvodnje x jedinica nekog proizvoda:

$$T(x) = 2x^3 + x^2 - 100x + 500 \text{ i } P(x) = x^2 + 50x.$$

Koliko proizvoda dnevno treba proizvesti pogon da bi dobit bila maksimalna (uz pretpostavku da se svi proizvedeni proizvodi prodaju)?

7. Odredite sve parcijalne derivacije drugog reda funkcije

$$f(x, y) = -8x^4 + 2x^2y^3 + 4y^8.$$

8. Cobb-Douglasova funkcija proizvodnje zadana je s

$$Q(K, L) = 20K^{1/2}L^{1/4},$$

gdje je K količina kapitala uloženog u proizvodnju (u tisućama kuna), a L broj radnih sati mjesečno. Odredite graniņu proizvodnju rada i graniņu proizvodnju kapitala na razini ulaganja kapitala od 2000 kn i 200 radnih sati mjesečno.

Literatura

1. B. Apsen: Repetitorij više matematike, Tehnička knjiga, Zagreb, 1985.
2. F. Ayres, E. Mendelson: Schaum's Easy Outline: Calculus, McGraw-Hill, N.Y., 2000.
3. T. Došlić, N. Sandrić:Matematika 1, interna skripta, Građevinski fakultet, Zagreb, 2008.
4. L.D. Hoffmann, G.L. Bradley: Calculus for Bussines, Economics, and the Social and Life Sciences, McGraw-Hill, N.Y., 2000.
5. L.D. Hoffmann, G.L. Bradley: Finite Mathematics with Calculus, Mc-Graw-Hill, N.Y., 1995.
6. D. Hughes-Hallet, A.M. Gleason, et al.: Calculus, J. Wiley, N.Y., 1999.
7. P. Javor: Uvod u matematičku analizu, Školska knjiga, Zagreb, 1988.
8. E. Schumacher: Matematika za agronome, prijevod T. Došlić, interna skripta Agronomskog fakulteta, Zagreb, 2005.
9. K. Sydsaeter, P. J. Hammond: Mathematics for Economic Analysis, Prentice Hall, 2006.
10. K. Šorić: Zbirka zadataka iz matematike s primjenom u ekonomiji, Element, Zagreb, 1997.
11. D. Veljan: Matematika 4, udžbenik i zbirka zadataka s rješenjima za 4. razred srednjih škola, Školska knjiga, Zagreb, 1997.