Uvod u poslovnu matematiku

Biserka Kolarec

UNIVERSITAS STUDIORUM ZAGRABIENSIS MDCLXIX

UDŽBENICI SVEUČILIŠTA U ZAGREBU
MANUALIA UNIVERSITATIS STUDIORUM ZAGRABIENSIS

Biserka Kolarec

Uvod u poslovnu matematiku

DRUGO, IZMIJENJENO I DOPUNJENO IZDANJE

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU, AGRONOMSKI FAKULTET
ZAGREB, 2025.

Recenzenti:
prof. dr. sc. Tomislav Došlić
doc. dr. sc. Petra Posedel Šimović
izv. prof. dr. sc. Azra Tafro

Lektura: Branka Rajčević, prof.

Objavljivanje ovog udžbenika odobrio je Senat Sveučilišta u Zagrebu na prijedlog Povjerenstva za sveučilišnu nastavnu literaturu rješenjem

Klasa: 032-01/24-02/29
Ur.broj: 251-25-07-01/2-25-2

od 18. ožujka 2025. godine

ISBN 978-953-8276-64-4

Predgovor

Prvo izdanje udžbenika "Uvod u poslovnu matematiku" izdano je 2010. godine. Petnaest godina kasnije ukazala se potreba za izdavanjem novog, dopunjenog i izmijenjenog izdanja koje sadrži materijal koji u cijelosti pokriva program istoimenog predmeta. On je obavezan predmet na prijediplomskom studiju Agrarna ekonomika na Agronomskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. U navedenom se vremenskom periodu mijenjao u pogledu sadržaja i pristupa njegovom iznošenju. U novom udžbeniku ima više problemskih zadataka, uputa o rješavanju kao i ilustracija i riješenih zadataka. On obuhvaća puno šira i dublja znanja i orijentira se na primjenu matematičkih metoda u problemima agroekonomske struke. Udžbenik sadrži izbor iz matematičkih osnova financijske matematike, linearne algebre i matematičke analize s naglaskom na ekonomskoj primjeni teorije. Posebna je pažnja u izlaganju posvećena motivaciji i postupnosti u uvođenju novih znanja, na račun ulaženja u dubinu i matematičke egzaktnosti gradiva. Taj je kompromis napravljen imajući na umu sastav studenata kojima matematika nije primarni interes, već njezine tehnike koriste u rješavanju problema. Nastavni sadržaj je, slično prijašnjem izdanju, podijeljen u šest tematskih cjelina:

- Financijska matematika
- Linearna algebra
- Elementarne funkcije
- Derivacije funkcija i primjene
- Funkcije više varijabli i parcijalne derivacije
- Uvod u integralni račun

Novina je da su tematske cjeline organizirane u 12 poglavlja tako da, uz tri tjedna predviđena za ponavljanje za ispite znanja, prate ritam izvođenja nastave kroz petnaest tjedana jednog semestra. Temeljni principi iznošenja gradiva su jasnoća i konciznost. Svako poglavlje sadrži teorijsku podlogu iznesenih tema te praktičnu primjenu teorije ilustriranu nizom riješenih primjera. Novine u odnosu na staro izdanje jesu zadatci za samostalan rad skupa s rješenjima na kraju svakog poglavlja te objedinjene formule na kraju udžbenika i kazalo za lakše snalaženje u danom materijalu. Kao dodatak udžbenik donosi poglavlje Elementi linearnog programiranja za studente koji žele znati više. Nadam se da će ovaj osuvremenjeni, izmijenjeni i dopunjeni udžbenik pomoći studentima studija Agrarne ekonomike u svladavanju predmeta "Uvod u poslovnu matematiku".

U Zagrebu, veljača 2025. godine

Biserka Kolarec

Sadržaj

I Prvi dio

1 Aritmetički i geometrijski niz, kamatni račun 9

1.1 Skupovi brojeva 9

1.2 Aritmetički niz 11

1.3 Geometrijski niz 14

1.4 Složeni kamatni račun s jednokratnom uplatom 15

1.5 Zadatci za vježbanje 17

2 Složeni kamatni račun, računi zajma i otpisa 19

2.1 Složeni kamatni račun s višekratnim uplatama 19

2.1.1 Konačna vrijednost prenumerando uplata 19

2.1.2 Konačna vrijednost postnumerando uplata 20

2.2 Početne vrijednosti isplata, račun zajma 22

2.2.1 Početna vrijednost prenumerando isplata 22

2.2.2 Početna vrijednost postnumerando isplata 23

2.3 Račun zajma 24

2.3.1 Otplata zajma nominalno jednakim anuitetima 24

2.4 Račun rente 26

2.5 Račun otpisa 27

2.5.1 Linearno otpisivanje 27

2.5.2 Aritmetičko-degresivno otpisivanje 28

2.5.3 Geometrijsko-degresivno otpisivanje 29

2.6 Zadatci za vježbanje 30

3 Linearna algebra 32
3.1 Vektori u n-dimenzionalnom realnom prostoru 32
3.2 Matrice 34
3.2.1 Posebne matrice 34
3.2.2 Operacije s matricama 35
3.2.3 Rang matrice 39
3.3 Zadatci za vježbanje 42

4 Rješavanje sustava, inverz matrice 44
4.1 Matrice u rješavanju sustava linearnih jednadžbi 44
4.2 Inverz matrice 47
4.3 Zadatci za vježbanje 52

5 Primjene matričnog računa 55
5.1 Determinanta matrice 55
5.2 Regresijski pravac 59
5.3 Analiza ulaza i izlaza 65
5.4 Zadatci za vježbanje 71

II Drugi dio

6 Elementarne funkcije 75
6.1 Polinomi i racionalne funkcije 76
6.1.1 Linearna funkcija 76
6.1.2 Potencije 78
6.1.3 Kvadratna funkcija 79
6.1.4 Racionalne funkcije 79
6.2 Eksponencijalne funkcije 80
6.3 Logaritamske funkcije 82
6.4 Zadatci za vježbanje 86

7 Domena, limes, operacije s funkcijama 89
7.1 Osnovna svojstva funkcija 89
7.2 Graf, domena i slika funkcije 90
7.2.1 Određivanje domene funkcije 90
7.2.2 Parnost i neparnost funkcije 91
7.3 Granična vrijednost (limes) funkcije 91
7.4 Operacije s funkcijama 95
7.4.1 Kompozicija funkcija 95
7.4.2 Inverzna funkcija 95
7.5 Zadatci za vježbanje 96

8 Derivacije funkcija 98
8.1 Pojam i značenje derivacije 98
8.2 Derivacije elementarnih funkcija 99
8.3 Tehnika određivanja derivacije funkcije 99
8.3.1 Kuharica za tehniku određivanja derivacije funkcije 99
8.4 Derivacije višeg reda 103
8.5 Zadatci za vježbanje 103

9 Derivacija - značenje i primjene 106
9.1 Određivanje intervala rasta i pada te lokalnih ekstrema funkcije 106
9.1.1 Kritične (stacionarne) točke i lokalni ekstremi 107
9.1.2 Ekstrem funkcije zadane na segmentu 110
9.2 Geometrijsko značenje druge derivacije 111
9.3 Analiza toka funkcije 112
9.4 Primjene derivacije funkcije u ekonomiji 113
9.4.1 Granične veličine 114
9.4.2 Osnovni princip granične analize 114
9.4.3 Pojam elastičnosti funkcije 114
9.5 Zadatci za vježbanje 116

III Treći dio

10 Funkcije više varijabli 120
10.1 Primjeri funkcije dvije varijable 120
10.2 Koordinatni sustav u prostoru 121
10.2.1 Graf funkcije dviju varijabli 121
10.3 Pojam parcijalne derivacije 122
10.3.1 Geometrijsko značenje parcijalnih derivacija 123
10.3.2 Marginalne produktivnosti rada i kapitala 124
10.4 Lokalni ekstremi funkcije dvije varijable 125
10.5 Zadatci za vježbanje 127

11 Uvod u integralni račun 130
11.1 Pojam neodređenog integrala 130
11.1.1 Tehnika integracije supstitucijom 133
11.1.2 Tehnika parcijalnog integriranja 134
11.2 Zadatci za vježbanje 135

12 Primjene integralnog računa 137
12.1 Pojam određenog integrala 137
12.2 Primjene integralnog računa 139
12.2.1 Određivanje površine pod krivuljom 139
12.2.2 Određivanje površine između dvije krivulje 142

12.2.3 Prosječna vrijednost funkcije 143
12.2.4 Primjena integralnog računa u graničnoj analizi 144

12.3 Zadatci za vježbanje 144

A Elementi linearnog programiranja 147

A.1 Grafičko rješavanje sustava linearnih nejednadžbi 148

A.2 Grafičko rješavanje problema linearnog programiranja 150

B Pregled formula 155

Literatura 162

Kazalo 162

Prvi dio

1 Aritmetički i geometrijski niz, kamatni račun 9

1.1 Skupovi brojeva
1.2 Aritmetički niz
1.3 Geometrijski niz
1.4 Složeni kamatni račun s jednokratnom uplatom
1.5 Zadatci za vježbanje

2 Složeni kamatni račun, računi zajma i otpisa 19

2.1 Složeni kamatni račun s višekratnim uplatama
2.2 Početne vrijednosti isplata, račun zajma
2.3 Račun zajma
2.4 Račun rente
2.5 Račun otpisa
2.6 Zadatci za vježbanje

3 Linearna algebra 32

3.1 Vektori u n-dimenzionalnom realnom prostoru
3.2 Matrice
3.3 Zadatci za vježbanje

4 Rješavanje sustava, inverz matrice . . . 44

4.1 Matrice u rješavanju sustava linearnih jednadžbi
4.2 Inverz matrice
4.3 Zadatci za vježbanje

5 Primjene matričnog računa 55

5.1 Determinanta matrice
5.2 Regresijski pravac
5.3 Analiza ulaza i izlaza
5.4 Zadatci za vježbanje

1. Aritmetički i geometrijski niz, kamatni račun

1.1 Skupovi brojeva

Pojam skupa je osnovni pojam. On je intuitivno jasan i nećemo ga definirati strogo matematički. **Skup** je cjelina sastavljena od osnovnih dijelova koji se zovu **elementi skupa**. Skupove označavamo velikim tiskanim slovima, npr. $A, B, S, \ldots$. Ukoliko je moguće pobrojati elemente nekog skupa, njih zatvaramo u vitičaste zagrade: $\{\ \}$. Npr. želimo li zapisati skup S čiji su elementi svi samoglasnici (otvornici) hrvatskog jezika, pišemo

$$S = \{a, e, i, o, u\}. \tag{1.1}$$

Činjenicu da je a element skupa S bilježimo: $a \in S$. Činjenicu "p nije element skupa S" zapisujemo $p \notin S$. Elemente skupa je dovoljno u skupu spomenuti samo jednom. Primjerice, $R = \{m, a, t, e, m, a, t, i, k, a\} = \{m, a, t, e, i, k\}$.
Broj elemenata nekog skupa zove se **kardinalni broj** skupa. Ako u nekom skupu ima konačno mnogo elemenata, kažemo da je skup **konačan**. U suprotnom, skup je **beskonačan**.
Skupove možemo stavljati u određene odnose. Neka je $D = \{o, u\}$. Skup D je dio ili **podskup** skupa S, on je sadržan u skupu S. Pišemo $D \subseteq S$ i čitamo: "skup D je podskup skupa S". Štoviše, $D \neq S$ pa je skup D pravi podskup skupa S; pišemo $D \subset S$.
Potrebno je dati oznaku skupu koji nema niti jednog elementa; takav skup zovemo **prazan skup**. Oznaka za prazan skup je $\emptyset$. Vidjet ćemo da rezultat skupovnih operacija može biti upravo prazan skup. Nasuprot praznom skupu definira se **univerzalni skup**. To je skup u kome su svi ostali skupovi smješteni kao podskupovi. Univerzalni skup označavat ćemo slovom $\mathscr{U}$.
Radit ćemo sa sljedeće tri operacije među skupovima: presjekom, unijom i razlikom (diferencijom), redom u oznakama: $\cap$, $\cup$, $\setminus$.

Definicija 1.1.1 — Operacije među skupovima. Zadana su dva skupa A i B. Definiramo:

1. **presjek** *skupova* A i B: $\quad A \cap B = \{x \in \mathscr{U} : x \in A \text{ i } x \in B\}$ (1.2)
2. **unija** *skupova* A i B: $\quad A \cup B = \{x \in \mathscr{U} : x \in A \text{ ili } x \in B\}$ (1.3)
3. **razlika** *skupa* A i B: $\quad A \setminus B = \{x \in \mathscr{U} : x \in A \text{ i } x \notin B\}$ (1.4)

Zapise iz definicija čitamo na sljedeći način:

1. ”A presjek B je skup svih elemenata x univerzalnog skupa $\mathscr{U}$ takvih da je x element skupa A i da je x element skupa B”,
2. ”A unija B je skup svih elemenata x univerzalnog skupa $\mathscr{U}$ takvih da je x element skupa A ili je x element skupa B”,
3. ”A minus B je skup svih elemenata x univerzalnog skupa $\mathscr{U}$ takvih da je x element skupa A i x nije element skupa B”.

Vrijedi $A\cap B = B\cap A$, $A\cup B = B\cup A$, ali općenito $A\setminus B \neq B\setminus A$.

■ **Primjer 1.1** Neka su skupovi S,D,R zadani kao gore (1.1). Tada je:

$$\begin{aligned}
&R\cap S = \{a,e,i\} = S\cap R,\\
&R\cup D = \{m,a,t,e,i,k,o,u\} = D\cup R,\\
&R\cap D = \emptyset,\\
&R\setminus S = \{m,t,k\},\\
&S\setminus R = \{o,u\}.
\end{aligned}$$

■

Prvenstveno nas zanimaju skupovi brojeva. Redom koji se uvode, to su skupovi: prirodnih, cijelih, racionalnih, realnih i kompleksnih brojeva. Svaki sljedeći skup brojeva sadrži prethodni kao svoj podskup, to jest proširenje je prethodnog skupa brojeva. Skupovi brojeva označit će se zato da budu ”zatvoreni” s obzirom na računske operacije.

Definicija 1.1.2 — Zatvorenost skupa. Kažemo da je skup A zatvoren s obzirom na računsku operaciju $*$ ako za svaka dva elementa $a_1, a_2 \in A$ vrijedi $a_1 * a_2 \in A$.

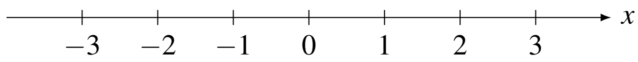
1. Brojeve koji su rezultat prebrajanja zovemo prirodni brojevi. To su $1,2,3,\dots$ Broj 0 nije prirodan broj. **Skup prirodnih brojeva** označavamo s $\mathbb{N}$. Dakle:
$$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,\dots\}. \tag{1.5}$$
Sve prirodne brojeve ne možemo pobrojati. Ipak, jasno je kako se nastavlja slijed elemenata. Lako je primijetiti da je skup prirodnih brojeva zatvoren obzirom na računske operacije zbrajanja i množenja. Međutim, skup prirodnih brojeva nije zatvoren s obzirom na računsku operaciju oduzimanja: npr. svakako je $6-3=3\in\mathbb{N}$, ali rezultat računa $3-6$ nije prirodan broj. Stoga se skup prirodnih brojeva proširuje do skupa cijelih brojeva.

2. **Skup cijelih brojeva** označava se sa $\mathbb{Z}$:
$$\mathbb{Z} = \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}. \tag{1.6}$$
Vidimo da je $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}$. Skup cijelih brojeva zatvoren je obzirom na računske operacije zbrajanja, množenja i oduzimanja. Međutim, skup cijelih brojeva nije zatvoren obzirom na računsku operaciju dijeljenja. Primjerice, $6:5$ nije cijeli broj.

3. Skup cijelih brojeva proširuje se dalje do **skupa racionalnih brojeva**. Njega označavamo slovom $\mathbb{Q}$. Skup $\mathbb{Q}$ zadajemo pravilom:
$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{Z}, n\neq 0\right\}. \tag{1.7}$$

Racionalni brojevi su razlomci kojima je u brojniku cijeli broj, a u nazivniku prirodni broj. Vrijedi $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. Skup racionalnih brojeva zatvoren je obzirom na računske operacije zbrajanja, množenja, oduzimanja i dijeljenja. Skup $\mathbb{Q}$ nije zatvoren obzirom na računsku operaciju vađenja drugog korijena iz pozitivnog broja. Primjerice, $\sqrt{2}$ ne može se zapisati u obliku razlomka iz definicije. Stoga $\sqrt{2}$ nije racionalan broj. Brojeve koji nisu racionalni zovemo **iracionalnim**.

4. Dovoljno velik skup brojeva u kojem ćemo raditi je **skup realnih brojeva**. Označava se s $\mathbb{R}$. Skup realnih brojeva uključuje sve racionalne brojeve i sve iracionalne brojeve. Realni brojevi potpuno prekrivaju brojevnu pravac (na slici). To znači da svaka točka na brojevnom pravcu ima kao koordinatu pridružen jedinstveni realan broj. Vrijedi i obratno, svakom realnom broju može se na jedinstven način pridružiti točka brojevnog pravca čija je on koordinata.



Skup realnih brojeva zatvoren je s obzirom na sve četiri osnovne računske operacije. Međutim, skup $\mathbb{R}$ nije zatvoren s obzirom na operaciju vađenja drugog korijena iz negativnog broja.

5. Skup realnih brojeva se dalje proširuje do **skupa kompleksnih brojeva** $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}, \tag{1.8}$$

pri čemu je $i = \sqrt{-1}$ tzv. imaginarna jedinica. Očito je

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}. \tag{1.9}$$

Neprazan podskup S skupa realnih brojeva je **ograničen odozgo** ako postoji realan broj M takav da je $x \leq M$ za sve $x \in S$. Ako je ujedno $M \in S$, M je **maksimum** skupa S. Neprazan podskup S skupa realnih brojeva je **ograničen odozdo** ako postoji realan broj m takav da je $x \geq m$ za sve $x \in S$. Ako je ujedno $m \in S$, m je **minimum** skupa S. Neprazan podskup S skupa realnih brojeva je **ograničen** ako je ograničen odozgo i odozdo. Ako je neprazan skup $S \subseteq \mathbb{R}$ ograničen odozgo, svaki realan broj M za koji je $x \leq M$ za sve $x \in S$ zovemo **gornja granica** skupa S. Slično, ako je neprazan skup $S \subseteq \mathbb{R}$ ograničen odozdo, svaki realan broj m za koji je $x \geq m$ za sve $x \in S$ zovemo **donja granica** skupa S. Svaki neprazan ograničen podskup skupa realnih brojeva ima najveću donju granicu i najmanju gornju granicu. Najveću donju granicu skupa $S \subseteq \mathbb{R}$ zovemo **infimum** skupa S, pišemo $\inf S$, a najmanju gornju granicu skupa S zovemo **supremum** skupa S, oznaka $\sup S$.

1.2 Aritmetički niz

Definicija 1.2.1 — Domena i kodomena funkcije. Neka su zadana dva neprezana skupa D i K. Ako je dano pravilo f po kome se svakom elementu iz skupa D pridružuje točno jedan element iz skupa K kažemo da je zadana funkcija f. Pišemo $y = f(x)$ i x zovemo nezavisna varijabla, a y zavisna varijabla. Na razini skupova zapisujemo $f : D \to K$. Skup D zove se **domena**, a skup K **kodomena** funkcije f.

Nizom zovemo funkciju čija je domena jednaka skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ ili njegovom konačnom podskupu.

Definicija 1.2.2 — Niz. Niz u skupu A je funkcija $f : \mathbb{N} \to A$. Konačan niz u A je funkcija $f : \{1,2,3,\dots,n\} \to A$, gdje je n neki prirodni broj.

Nadalje ćemo raditi s nizovima brojeva. Dakle, na mjestu skupa A iz definicije stajat će neki od spomenutih skupova brojeva.
Niz je funkcija na skupu prirodnih brojeva pa možemo računati $f(1), f(2), \dots, f(n), \dots$ Sve navedene vrijednosti su elementi skupa A. Možemo zapisati:

$$a_1 = f(1), a_2 = f(2), \dots, a_n = f(n), \dots \tag{1.10}$$

Kažemo da je zadan niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **općim članom** a_n. Ako je to moguće, opći član niza zadaje se formulom.

■ **Primjer 1.2** Odredimo prvih pet članova niza zadanog općim članom a_n:

(a) $a_n = 2^n + 1$
(b) $a_n = 2n - 3$

Rješenje:

(a) Za $n = 1,2,3,4,5$ računamo

$$a_1 = 2^1 + 1 = 3,\ a_2 = 2^2 + 1 = 5,\ a_3 = 2^3 + 1 = 9,\ a_4 = 2^4 + 1 = 17,\ a_5 = 2^5 + 1 = 33.$$

(b) Uvrštavamo li redom prirodne brojeve od 1 do 5 na mjesto n, dobivamo:

$$a_1 = -1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 3,\ a_4 = 5,\ a_5 = 7.$$

Pogledajmo dobiveni niz brojeva: $-1, 1, 3, 5, 7$. Znamo li ga nastaviti? Razlika između susjednih članova niza je stalna i iznosi 2. Ovaj niz je primjer aritmetičkog niza.

■

Definicija 1.2.3 — Aritmetički niz. Aritmetički niz je takav niz brojeva u kome je razlika između svakog (osim prvog) člana niza i njegovog neposrednog prethodnika stalna (konstantna). Tu konstantnu razliku označavamo sa d i zovemo **razlikom** (diferencijom) aritmetičkog niza. Ako je $d > 0$, niz zovemo **rastućim**, ako je $d < 0$ **padajućim**, a ako je $d = 0$, niz zovemo **stacionarnim**.

R Otkud naziv "aritmetički"? Svaki broj u aritmetičkom nizu koji ima neposrednog prethodnika i neposrednog sljedbenika jednak je aritmetičkoj sredini tih dvaju brojeva. Npr. u aritmetičkom nizu $-1,1,3,5,7,\dots$ iz prethodnog primjera je

$$1 = \frac{-1+3}{2}, \quad 3 = \frac{1+5}{2}, \quad 5 = \frac{3+7}{2}, \dots$$

■ **Primjer 1.3** Kako bismo odredili koji je od sljedećih nizova aritmetički, računamo razlike članova niza, osim prvog, i njegova neposrednog prethodnika. One moraju biti iste, jednake razlici d.

a)	$-1, -3, -5, -7, -9, \dots$	$d = -2$, padajući aritmetički niz
b)	$\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots$	$1 - \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4} - 1$, nije aritmetički niz
c)	$3, 3, 3, \dots$	$d = 0$, stacionarni aritmetički niz
d)	$13, 10, 7, 4, \dots$	$d = -3$, padajući aritmetički niz
e)	$0, 1, 2, 3, 4, \dots$	$d = 1$, rastući aritmetički niz
f)	$1, 4, 9, 16, 25, \dots$	$4 - 1 \neq 9 - 4$, nije aritmetički niz

■

Aritmetički niz zadan je čim mu znamo prvi član a_1 i razliku d. Tada je:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d, \\ a_3 &= a_2 + d = a_1 + 2d, \\ a_4 &= a_3 + d = a_1 + 3d, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{1.11}$$

Opći član aritmetičkog niza možemo izraziti preko prvog člana a_1 i razlike niza d kao

$$a_n = a_1 + (n-1)d. \tag{1.12}$$

■ **Primjer 1.4** Odredimo izraz za opći član aritmetičkog niza kojem je $a_1 = -3$, $d = 10$.

Rješenje: Uvrstimo podatke u izraz $a_n = a_1 + (n-1)d$. Dobivamo

$$a_n = -3 + 10(n-1) = -3 + 10n - 10,$$

odnosno

$$a_n = 10n - 13.$$

■

Vježba 1.1 Kako glasi opći član aritmetičkog niza u kome je $a_3 = 1$ i $d = 1$? $a_n = n - 2$

Označimo sa S_n zbroj prvih n članova aritmetičkog niza:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n. \tag{1.13}$$

Odredit ćemo iznos tog zbroja. Zapišimo S_n dva puta:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + \quad (a_1 + d) + \quad \cdots + \quad (a_1 + (n-1)d) \\ S_n &= (a_1 + (n-1)d) + \quad (a_1 + (n-2)d) + \quad \cdots + \quad a_1. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Sad zbrojimo dvije jednakosti. Slijeva dobivamo zbroj $2S_n$. S desne strane, zbrajajući kako je naznačeno grupiranjem, dakle a_1 s $a_1 + (n-1)d$, $a_1 + d$ s $a_1 + (n-2)d, \ldots$, dobivamo n puta isti zbroj $2a_1 + (n-1)d$. Znači da je

$$2S_n = n \cdot (2a_1 + (n-1)d). \tag{1.15}$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza zadanog prvim članom a_1 i razlikom d računamo po formuli

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d). \tag{1.16}$$

Primijetimo da možemo pisati i

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + (a_1 + (n-1)d)) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n). \tag{1.17}$$

■ **Primjer 1.5** Odredimo zbrojeve:

a) prvih 60 prirodnih brojeva,
b) prvih deset parnih brojeva.

Rješenje:

a) Kako je $n = 60$, $a_1 = 1$, $a_{60} = 60$,

$$S_{60} = \frac{60}{2}(1+60) = 30 \cdot 61 = 1830.$$

b) Prvi parni broj je broj 2. Razlika u aritmetičkom nizu kojeg čine parni brojevi je također jednaka 2. Stoga imamo

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2 \cdot 2 + (10-1) \cdot 2) = 110.$$

■

1.3 Geometrijski niz

Niz $2, 4, 8, 16, \ldots$ nije aritmetički niz. Svaki sljedeći član niza se od prethodnog dobiva množenjem brojem 2. Ovaj niz je primjer geometrijskog niza.

Definicija 1.3.1 — Geometrijski niz. Niz brojeva u kome je kvocijent člana niza (osim prvog) i njegovog neposrednog prethodnika stalan (konstantan) zove se **geometrijski niz**. Stalan kvocijent (količnik) q zovemo kvocijent (količnik) geometrijskog niza.

Prema tome, u geometrijskom nizu vrijedi

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \cdots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \cdots = q. \tag{1.18}$$

Geometrijski niz potpuno je zadan s a_1 i q. Naime,

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 q, \\ a_3 &= a_2 q = a_1 q^2, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{1.19}$$

Opći član a_n **geometrijskog niza** možemo izraziti preko prvog člana a_1 i kvocijenta niza q kao

$$a_n = a_1 q^{n-1}. \tag{1.20}$$

■ **Primjer 1.6** Odredimo kvocijent i sljedeća tri člana geometrijskog niza $2, -6, 18, \ldots$

Rješenje: Vidimo da je

$$\frac{-6}{2} = \frac{18}{-6} = -3,$$

tj. $q = -3$. Dakle, svaki sljedeći član geometrijskog niza se od prethodnog dobiva množenjem s -3. Onda je: $a_4 = -54$, $a_5 = 162$, $a_6 = -486$.

■

R Otkud naziv "geometrijski"? Svaki broj u geometrijskom nizu (pozitivnih brojeva) koji ima neposrednog prethodnika i neposrednog sljedbenika jednak je geometrijskoj sredini tih dvaju brojeva.

Npr. uzmemo li geometrijski niz $2, 6, 18, 54, \ldots$, tada je

$$6 = \sqrt{2 \cdot 18}, \quad 18 = \sqrt{6 \cdot 54}, \ldots$$

Odredimo zbroj s_n prvih n članova geometrijskog niza. Opet jednakost

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \tag{1.21}$$

zapisujemo dva puta (drugi puta pomnoženu s q):

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} \\ q s_n &= a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^n \end{aligned} \tag{1.22}$$

Oduzmemo li od druge jednakosti prvu, nakon skraćivanja jednakih pribrojnika dobivamo:

$$q s_n - s_n = a_1 q^n - a_1. \tag{1.23}$$

Sad izlučimo zajedničke faktore:

$$s_n(q-1) = a_1(q^n - 1). \tag{1.24}$$

Da dobijemo izraz za s_n, preostaje podijeliti zadnju jednakost s $q-1$. Pritom moramo pretpostaviti da je $q \neq 1$. Za $q = 1$ geometrijski niz je stacionaran, to jest $a_n = a_1$ za svaki prirodni broj n. Stoga je u tom slučaju $s_n = n a_1$.

Zbroj prvih n članova geometrijskog niza zadanog prvim članom a_1 i kvocijentom q, $q \neq 1$ računamo po formuli

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}. \tag{1.25}$$

■ **Primjer 1.7** Odredimo zbroj prvih 8 članova niza zadanog općim članom $a_n = 2^n$.

Rješenje: Budući je za sve $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = \frac{2 \cdot 2^n}{2^n} = 2,$$

zadani niz je geometrijski. Kako je $a_1 = 2$, $q = 2$, imamo da je

$$s_8 = 2 \cdot \frac{2^8 - 1}{2 - 1} = 2 \cdot 255 = 510.$$

■

1.4 Složeni kamatni račun s jednokratnom uplatom

U ovom odjeljku promatramo razne modele novčane štednje. Ona se odvija najčešće unutar novčarskih ustanova (banke, zadruge, pošte). Ustanova štednju stimulira davanjem kamate.

Iznos kamate određuje **kamatna stopa (kamatnjak)**. Kamatna stopa zadaje postotak koji novčarska ustanova daje na novac primljen na štednju. Ako ne naznačimo drugačije uzimat ćemo da je kamatna stopa p godišnja i fiksna u cijelom razdoblju štednje. Ona će biti zadana u postotnom iznosu tako da npr. 5% znači $\frac{5}{100} = 0.05$.

Iznos novca stavljen na štednju zovemo **glavnica** i označavamo ga slovom C.

Razdoblje štednje ili ukamaćivanja označavamo slovom n. Uzimati ćemo da je razdoblje štednje zadano u godinama.
Iznos kamate označavamo slovom I. Ako je na štednju stavljena glavnica C na razdoblje od godinu dana uz kamatnjak p, iznos kamate je $I = Cp$.

Uzimat ćemo da je obračun kamata **dekurzivan**. Kod dekurzivnog obračuna kamata se kamata računa na kraju godine na iznos s početka godine. Ako je za štednju ugovorena kamatna stopa p, broj

$$q = 1 + p \tag{1.26}$$

zovemo **dekurzivni kamatni faktor**.

Kod kamatnog računa kojeg zovemo složenim i s jednokratnom uplatom radi se o sljedećem: glavnica se ulaže na određeno razdoblje i nakon svake godine povećana za iznos kamate postaje svota koja se ukamaćuje u narednoj godini. Ukamaćivanje je složenije – računaju se "kamate na kamatu". Opišimo slučaj precizno.

Neka uložimo glavnicu C na štednju kroz razdoblje od n godina uz fiksnu kamatnu stopu p. Iznos kamate u prvoj godini štednje je $I = Cp$. Na kraju prve godine štednje, štediša raspolaže iznosom C_1 koji je jednak glavnici uvećanoj za iznos kamate:

$$C_1 = C + Cp = C(1 + p). \tag{1.27}$$

Dalje se iznos C_1 ulaže na sljedeću godinu dana uz istu kamatnu stopu p. Na iznos C_1 se na kraju ove nove (druge) obračunske godine obračunava kamata. Kamata na kraju druge godine iznosi $C_1 p$ tako da je iznos na računu na kraju druge godine jednak

$$C_2 = C_1 + C_1 p = C_1(1 + p) = C(1 + p)^2. \tag{1.28}$$

Tako nastavljamo dalje. Nakon n godina iznos jednokratne uplate glavnice C naraste na iznos

$$C_n = C(1 + p)^n. \tag{1.29}$$

Uvođenjem dekurzivnog kamatnog faktora q, ukupnu svotu na kraju n godina štednje možemo zapisati kraće kao

$$C_n = Cq^n. \tag{1.30}$$

Kod složenog kamatnog računa s jednokratnom uplatom glavnice C na n godina uz kamatnu stopu p, iznos na računu je

$$C_n = C(1 + p)^n = Cq^n. \tag{1.31}$$

R Primijetimo da svote

$$C, \quad C_1 = C(1 + p), \quad C_2 = C(1 + p)^2, \quad \ldots, \quad C_n = C(1 + p)^n$$

čine (konačni) geometrijski niz. Uočimo da je C_n ovdje $(n + 1)$. član geometrijskog niza kome je prvi član C.

Napomenimo da je obračunavanje kamate u ovim modelima pojednostavljeno. Pretpostavljamo da se pripis kamate obavlja jednom godišnje. Jasno je da to ne mora biti tako. Ako se kamata obračunava npr. dva puta godišnje, kamatnu stopu treba prilagoditi novom obračunu. Kako? Neka je **nominalna** (ugovorena) godišnja kamatna stopa p. **Relativnu** kamatnu stopu za polugodišnji obračun dobivamo dijeljenjem nominalne kamatne stope (p) s brojem obračuna ($k = 2$) tijekom godine. Dakle, relativna kamatna stopa za polugodišnji obračun iznosi $r = \frac{p}{2}$. Iznos na računu nakon godinu dana štednje (nakon dva obračuna!) je

$$C_1 = C\left(1+\frac{p}{2}\right)^2. \tag{1.32}$$

Ukoliko bi se obračuni vršili na kraju svakog mjeseca, iznos nakon godine dana ($k = 12$ razdoblja ukamaćivanja) bio bi, uz $r = \frac{p}{12}$,

$$C_1 = C\left(1+\frac{p}{12}\right)^{12}. \tag{1.33}$$

Naravno da niti kamatna stopa ne mora biti fiksna u cijelom razdoblju štednje kako mi to ovdje uzimamo. Ako je tako, tada se razdoblje podijeli na više podrazdoblja u kojima kamatna stopa ima fiksnu vrijednost. Pri obračunu iznosa na računu, konačni iznos na kraju prethodnog podrazdoblja uzima se kao glavnica za sljedeće podrazdoblje.

Vježba 1.2 Osoba je 1.1.2021. godine u banku uložila 1 000 eura. Kolikim će iznosom ta osoba raspolagati 31.12.2023. godine ako je godišnja kamatna stopa 10%, a obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan? Koliki bi bio konačni iznos na računu ukoliko bi obračun kamata bio mjesečni?

1331 euro, 1348.18 eura

Vježba 1.3 Osoba je na štednju uložila 30 000 eura. Ako na kraju četvrte godine štednje raspolaže s 45 000 eura, uz koju kamatnu stopu je ugovorena štednja ako je obračun kamata godišnji, složen i dekurzivan? 10.68%

Vježba 1.4 Za koliko godina će se udvostručiti glavnica uložena na štednju uz ugovorenu godišnju kamatnu stopu od 3.6%, ako se kamate obračunavaju kvartalno, složeno i dekurzivno?
19.34 godine

1.5 Zadatci za vježbanje

1. Odredite opći član aritmetičkog niza $-3, 0, 3, \ldots$.
2. Odredite opći član aritmetičkog niza $-18, -16, -14, \ldots$.
3. Odredite aritmetički niz kojem je $a_2 = -1$, $a_5 = 5$.
4. Odredite opći član aritmetičkog niza na koji znamo da je $a_2 = 3i$ i $a_3 = 4i$.
5. Je li broj 96 član aritmetičkog niza (a) $1, 6, 11, \ldots$, (b) $3, 7, 11, \ldots$?
6. Odredite broj i zbroj svih neparnih brojeva između 175 i 243.
7. Odredite zbroj prvih 20 članova aritmetičkog niza $1, 3, 5, 7, \ldots$.
8. Odredite zbroj prvih 20 članova aritmetičkog niza $6, 3, 0, -3, \ldots$.
9. Odredite zbroj prvih 17 članova aritmetičkog niza za koji je $a_1 + a_5 = 18$ i $a_7 - a_3 = 8$.
10. Odredite opći član geometrijskog niza $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$.
11. Odredite opći član geometrijskog niza u kojem je $a_1 = 2$ i $a_3 = 8$.

12. Je li 960 član geometrijskog niza $15, 30, 60, \ldots$?
13. Neka je opći član geometrijskog niza dan s $a_n = 2^n$. Odredite zbroj prvih 10 članova toga niza.
14. Neka osoba u banku uloži 20000 eura. Izračunajte vrijednost uloga na kraju desete godine štednje ako je obračun kamata godišnji, složen i dekurzivan uz fiksnu godišnju kamatnu stopu $p = 8$. Koliki je ukupni iznos složenih kamata?
15. Kolika je godišnja kamatna stopa ugovorena za štednju kod koje se glavnica za 4 godine uveća za 16% ako je ukamaćivanje složeno, dekurzivno i mjesečno?
16. Osoba je na štednju jednokratno uložila 30 000 eura. Ako na kraju 4. godine štednje raspolaže s 35 000 eura, uz koliku kamatnu stopu je bio uložen novac ako je obračun kamata bio godišnji, složen i dekurzivan?

Rješenja zadataka

1. $a_n = 3n - 6$
2. $a_n = 2n - 20$
3. $a_n = n - 3$
4. $a_n = (n+1)i$
5. (a) da, (b) ne
6. $n = 35$, 7315
7. 400
8. -450
9. 357
10. $a_n = (1/3)^n$
11. $a_n = 2^n$
12. da, 7. član
13. 2046
14. $C_{10} = 43178.49$ eura, $I = 23178.49$ eura
15. $p = 3.7\%$
16. $p = 3.9\%$

2. Složeni kamatni račun, računi zajma i otpisa

2.1 Složeni kamatni račun s višekratnim uplatama

Za razliku od složenog kamatnog računa s jednokratnom uplatom kod kojeg se iznos novca uplaćuje jednom, na početku štednje, štednja se može odvijati tako da se na štednju u jednakim vremenskim razdobljima ulažu jednake svote. Npr. štediša odluči da će od mjesečnog prihoda (plaće) na štednju stavljati jednake svote R. Uzimati ćemo da je razmak između uplata jednak duljini jednog razdoblja za obračun kamate i da se uplate obavljaju bilo na početku, bilo na kraju razdoblja. Govorimo o

1. **prenumerando** uplati ako se fiksan iznos R uplaćuje na početku pojedinog razdoblja ukamaćivanja,
2. **postnumerando** uplati ako se uplate iznosa R vrše na kraju pojedinog razdoblja ukamaćivanja.

Za prenumerando i za postnumerando račun nadalje određujemo izraze za iznose konačne vrijednosti višekratnih uplata i početne vrijednosti višekratnih isplata.

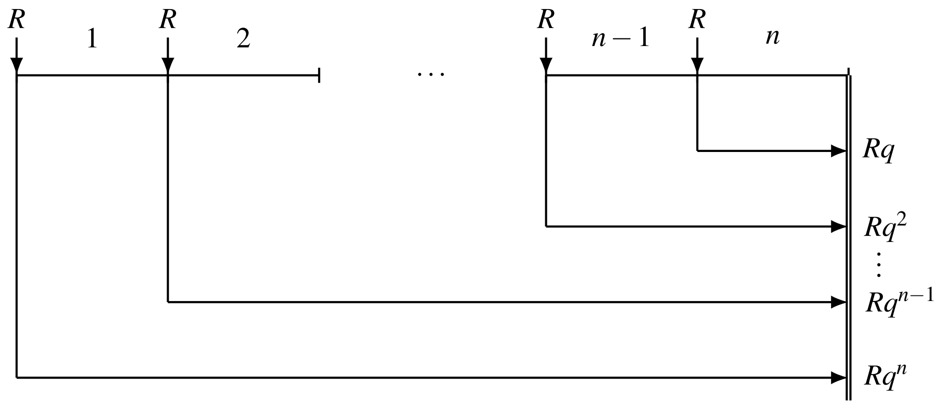
2.1.1 Konačna vrijednost prenumerando uplata

Uzmimo da osoba kroz n godina na početku godine uplaćuje jednake iznose R. Neka je štednja ugovorena uz godišnju kamatnu stopu p, fiksnu u cijelom razdoblju štednje. Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan. Koliki je iznos na računu nakon isteka n-te godine? Označimo s q dekurzivni kamatni faktor $q = 1 + p$.

Slika 2.4 ilustrira doprinos svake pojedine uplate konačnoj vrijednosti računa. Iznos R uplaćen na početku prve godine može se, sam za sebe, tretirati kao jednokratna uplata na vrijeme od n godina. Onda on konačnom zbroju doprinosi s Rq^n. Dalje, iznos R uplaćen na početku druge godine možemo smatrati jednokratnom uplatom na vrijeme od $(n-1)$ godine; on konačnoj vrijednosti doprinosi s Rq^{n-1}, ... , iznos R uplaćen na početku posljednje godine štednje konačnoj vrijednosti doprinosi s Rq. Konačna vrijednost, označimo je C_n, je zbroj svih navedenih iznosa (na slici desno):

$$C_n = Rq + Rq^2 + \cdots + Rq^n. \tag{2.1}$$

Primijetimo da pribrojnici čine geometrijski niz: prvi član mu je Rq, a kvocijent q. Izraz za konačnu vrijednost dobivamo po formuli za zbroj prvih n članova geometrijskog niza.



Slika 2.1: Doprinos prenumerando uplata konačnom iznosu

Izraz za konačnu vrijednost prenumerando uplata iznosa R kroz n godina uz dekurzivni kamatni faktor q je

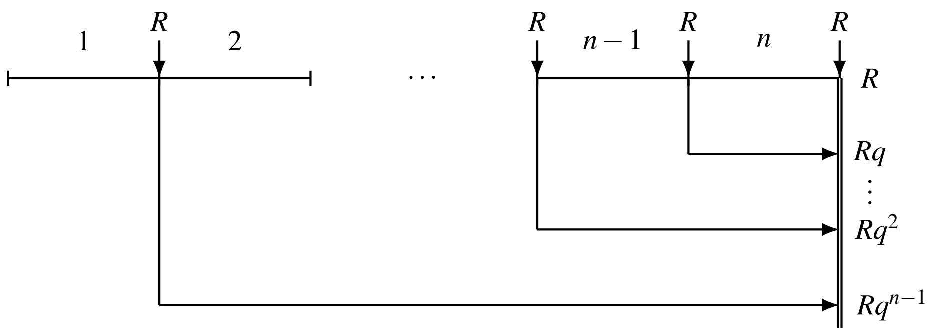
$$C_n = Rq\frac{q^n - 1}{q - 1}. \tag{2.2}$$

Ako se obračun kamata vrši k puta godišnje, tada je $r = \frac{p}{k}, q = 1 + r$ te ima kn obračuna pa je formula za konačnu vrijednost

$$C_n = Rq\frac{q^{kn} - 1}{q - 1}. \tag{2.3}$$

2.1.2 Konačna vrijednost postnumerando uplata

Uzmimo isti slučaj višekratnih uplata, no neka se fiksan iznos R uplaćuje na kraju godine. Ilustrirajmo slikom doprinos svake pojedine uplate konačnoj vrijednosti na računu:



Slika 2.2: Doprinos postnumerando uplata konačnom iznosu

Iznos R uplaćen na kraju prve godine možemo shvatiti kao jednokratnu uplatu na vrijeme od $(n-1)$ godine. On konačnom zbroju doprinosi s Rq^{n-1}. Slično, iznos R uplaćen na kraju $(n-1)$. godine možemo smatrati jednokratnom uplatom na vrijeme od 1 godine. Iznos R uplaćen na kraju n-te godine štednje ne zaradi kamatu, on konačnoj vrijednosti doprinosi s R. Konačna vrijednost svih uplata jednaka je:

$$C_n = R + Rq + \cdots + Rq^{n-1}. \tag{2.4}$$

Pribrojnici čine geometrijski niz kome je prvi član R, a kvocijent q. Prema izrazu za zbroj prvih n članova geometrijskog niza, izračunamo konačnu vrijednost postnumerando uplata.

Izraz za konačnu vrijednost postnumerando uplata iznosa R kroz n godina uz dekurzivni kamatni faktor q je

$$C_n = R\frac{q^n - 1}{q - 1}. \tag{2.5}$$

Ako se obračun kamata vrši k puta godišnje, tada je $r = \frac{p}{k}$, $q = 1 + r$ **te ima kn obračuna** pa je formula za konačnu vrijednost

$$C_n = Rq\frac{q^{kn} - 1}{q - 1}. \tag{2.6}$$

■ **Primjer 2.1** Osoba kroz 5 godina krajem svake godine ulaže u banku po 1 000 eura. Koliko će novaca imati na kraju pete godine ako je obračun kamata godišnji, složen i dekurzivan, a banka obračunava 6% godišnjih kamata kroz cijelo razdoblje štednje?

Rješenje: Imamo postnumerando račun s:

$$\begin{aligned} R &= 100 \\ n &= 5 \\ p &= 6, \quad q = 1.06 \end{aligned}$$

Po formuli za konačni iznos postnumerando računa je

$$C_5 = 1000\frac{1.06^5 - 1}{1.06 - 1} = 5\,637.09 \text{ eura.}$$

■

■ **Primjer 2.2** Koliki iznos treba na kraju svakog mjeseca na štednju uplaćivati štediša koji želi za 4 godine uštedjeti 2 500 eura? Obračun kamata je mjesečni, složen i dekurzivan, a banka obračunava 3.2% godišnjih kamata kroz cijelo razdoblje štednje.

Rješenje: Imamo postnumerando račun s mjesečnim obračunom:

$$\begin{aligned} C_4 &= 2500 \\ n &= 4, \text{ ali ima 48 obračuna} \\ p &= 3.2\,,\ q = 1 + \frac{3.2}{12 \cdot 100} = 1.00266 \end{aligned}$$

Rješavamo jednadžbu

$$2\,500 = R \cdot \frac{1.00266^{48} - 1}{1.00266 - 1} \Rightarrow 51.126 \cdot R = 2\,500.$$

Rješenje je 48.90 eura.

■

■ **Primjer 2.3** Početkom svake godine radnik uplaćuje na štednju 300 eura dobivene božićnice. Za koliko će godina uštedjeti 3 000 eura ako je obračun kamata godišnji, složen i dekurzivan, a banka obračunava kamatu od 4.2 % godišnje?

Rješenje: Imamo prenumerando račun s godišnjim obračunom:

$$\begin{aligned} R &= 300 \\ p &= 4.2\,,\ q = 1.042 \\ C_n &= 3\,000 \end{aligned}$$

Rješavamo jednadžbu

$$3\,000 = 300 \cdot 1.042 \frac{1.042^n - 1}{1.042 - 1} \Rightarrow 1.042^n = 1.403$$

Logaritmiranjem dobivamo $n = 8.23$ godine.

■

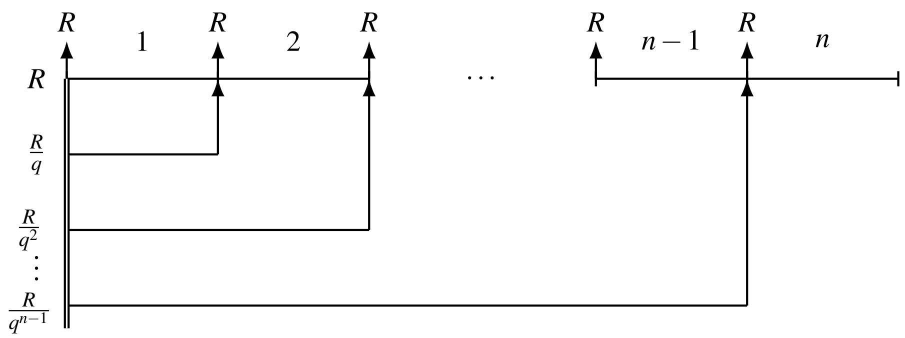
2.2 Početne vrijednosti isplata, račun zajma

Dalje promatramo drugi problem složenog kamatnog računa: problem određivanja početne vrijednosti kod složenog kamatnog računa s višekratnim isplatama. Precizno, problem je: kolikim iznosom A treba raspolagati danas da bi se na temelju njega u sljedećih n godina moglo isplaćivati nominalno jednake iznose R ako je obračun kamata godišnji, složen i dekurzivan uz fiksnu kamatnu stopu p u cijelom razdoblju.

R Pojasnimo termin "nominalno". Kako se na temelju početno raspoloživih sredstava određuje iznos isplata R fiksan u čitavom razdoblju isplata, taj iznos u cijelom vremenu isplata ne mora imati i istu stvarnu vrijednost. Ovisno o kretanjima na tržištu novcem isti iznos R može imati različite stvarne vrijednosti. Dakle, iznosi isplata su samo nominalno jednaki.

2.2.1 Početna vrijednost prenumerando isplata

Od početne vrijednosti A_n želimo na početku svake od n godina isplaćivati nominalno jednake iznose R. Početna vrijednost jest iznos koji danas moramo imati na računu s kojega će se vršiti navedene isplate. Uzimamo da je kamatna stopa fiksna u cijelom vremenu i jednaka p, a obračun kamata godišnji, složen i dekurzivan. Kolikim iznosom A_n trebamo raspolagati? Ilustrirajmo slikom:



Slika 2.3: Početni iznos postnumerando isplata

Na početku prve godine treba isplatiti iznos R, on ulazi u početni iznos. Na početku druge godine treba ponovno isplatiti iznos R, no on u početni iznos ulazi s vrijednošću $\frac{R}{q}$ jer će stajanjem godinu dana na računu upravo iznos $\frac{R}{q}$ narasti do $\frac{R}{q} \cdot q = R$. Slično ide račun i dalje. Iznos R kojeg moramo isplatiti na početku n-te godine u početnoj vrijednosti jednak je $\frac{R}{q^{n-1}}$, jer će uložen na štednju kroz $(n-1)$ godinu s kamatama narasti do iznosa R. Dakle, početna vrijednost A_n mora biti jednaka:

$$A_n = R + \frac{R}{q} + \cdots + \frac{R}{q^{n-1}}. \tag{2.7}$$

Pribrojnici tvore geometrijski niz kome je prvi član R, a kvocijent $\frac{1}{q}$. Zato je

$$A_n = R\frac{\left(\frac{1}{q}\right)^n - 1}{\frac{1}{q} - 1} = R\frac{\frac{1-q^n}{q^n}}{\frac{1-q}{q}} = R\frac{q(1-q^n)}{q^n(1-q)} = R\frac{(1-q^n)}{q^{n-1}(1-q)} = R\frac{(q^n-1)}{q^{n-1}(q-1)}. \tag{2.8}$$

Početna vrijednost prenumerando isplata iznosa R kroz n godina uz dekurzivni kamatni faktor q je

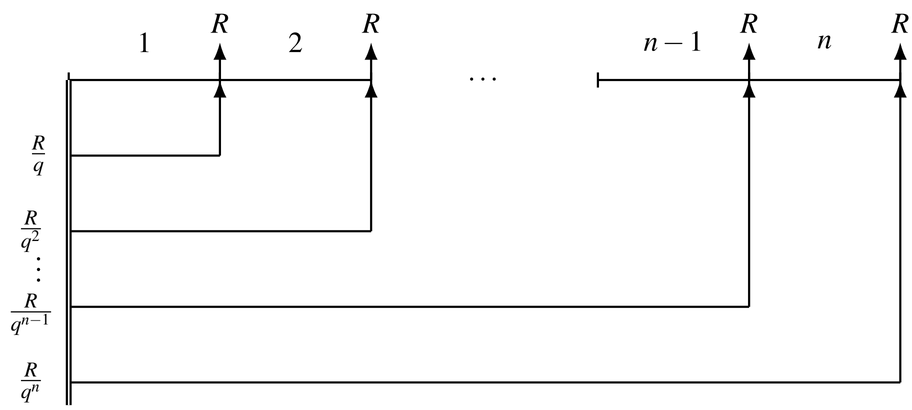
$$A_n = R\frac{q^n - 1}{q^{n-1}(q-1)}. \tag{2.9}$$

Ako se obračun kamata vrši k puta godišnje, tada je $r = \frac{p}{k}, q = 1 + r$ te ima kn obračuna pa je formula za konačnu vrijednost

$$A_n = R\frac{q^{kn} - 1}{q^{kn-1}(q-1)}. \tag{2.10}$$

2.2.2 Početna vrijednost postnumerando isplata

Kolika mora biti početna vrijednost A_n želimo li na temelju nje kroz n godina isplaćivati iznos R na kraju svake godine?



Slika 2.4: Početni iznos postnumerando isplata

Kao prije, početna vrijednost A_n jednaka je zbroju svih lijevo navedenih iznosa:

$$A_n = \frac{R}{q} + \frac{R}{q^2} + \cdots + \frac{R}{q^n}. \tag{2.11}$$

Pribrojnici tvore geometrijski niz kome je prvi član $\frac{R}{q}$, a kvocijent $\frac{1}{q}$. Stoga je

$$A_n = \frac{R}{q}\frac{\left(\frac{1}{q}\right)^n - 1}{\frac{1}{q} - 1} = \frac{R}{q}\frac{\frac{1-q^n}{q^n}}{\frac{1-q}{q}} = \frac{R}{q}\frac{q(1-q^n)}{q^n(1-q)} = R\frac{q^n-1}{q^n(q-1)}. \tag{2.12}$$

Izraz za početnu vrijednost postnumerando isplata iznosa R kroz n godina uz dekurzivni kamatni faktor q je

$$A_n = R\frac{q^n - 1}{q^n(q-1)}. \tag{2.13}$$

Ako se obračun kamata vrši k puta godišnje, tada je $r = \frac{p}{k}, q = 1 + r$ te ima kn obračuna pa je formula za konačnu vrijednost

$$A_n = R\frac{q^{kn} - 1}{q^{kn}(q-1)}. \tag{2.14}$$

■ **Primjer 2.4** Koliki iznos treba danas položiti u banku da bi se na osnovi njega u sljedećih 5 godina na početku svake godine moglo podizati 1 000 eura? Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan i primjenjuje se fiksna godišnja kamatna stopa 9%.

Rješenje: Imamo

$$R = 1\,000$$
$$n = 5$$
$$p = 9\,,\; q = 1.09.$$

Radi se o isplatama početkom svake godine pa je

$$A_5 = 1\,000\frac{1.09^5 - 1}{1.09^4(1.09-1)} \approx 4\,239.71 \text{ eura.}$$

■

2.3 Račun zajma

Veća količina novca za neku investiciju osigurava se zajmom. Zajmodavatelj (najčešće banka) na zajmu zarađuje budući da zajmoprimatelj vraća iznos zajma uvećan za kamate. Zajam se vraća otplatama koje se nazivaju **anuiteti**. Anuiteti dospijevaju u jednakim vremenskim razmacima.
Anuitet se sastoji od dva dijela:

1. **otplatne kvote** koja predstavlja stvarni iznos za koji se umanjuje glavnica zajma i
2. **složene kamate**.

Spominjemo najčešću vrstu otplate zajma: otplatu jednakim anuitetima.

2.3.1 Otplata zajma nominalno jednakim anuitetima

Uzimat ćemo:

- da je obračun kamata godišnji, složen i dekurzivan,
- da su anuiteti nominalno jednaki i da dospijevaju u jednakim vremenskim razmacima krajem godine (postnumerando),
- da je duljina razdoblja između ukamaćivanja jednaka duljini dospijeća između anuiteta i iznosi jednu godinu te
- da je kamatnjak fiksan u cijelom vremenu otplate (amortizacije) zajma.

Ustalimo oznake: iznos (glavnicu) odobrenog zajma označavat ćemo s C, a je oznaka za iznos nominalno jednakih anuiteta, n označava broj godina otplate zajma, p fiksni kamatnjak, a q

dekurzivni kamatni faktor. Iznos C možemo smatrati početnom vrijednošću složenog kamatnog računa s postnumerando isplatama iznosa a. Dakle,

$$C = a\frac{q^n - 1}{q^n(q-1)}. \tag{2.15}$$

Odavde dobivamo izraz za iznos nominalno jednakog anuiteta a.

Izraz za iznos nominalno jednakih anuiteta a u otplati zajma iznosa C kroz n godina uz dekurzivni kamatni faktor q je

$$a = C\frac{q^n(q-1)}{q^n - 1}. \tag{2.16}$$

■ **Primjer 2.5** Zajam od 500 000 eura odobren je poduzeću na 3 godine uz 9% godišnjih kamata. Kolikim se nominalno jednakim anuitetima otplaćuje zajam?

Rješenje:

$$C = 500000$$
$$n = 3$$
$$p = 9,\ q = 1.09.$$
$$a = 500\,000\frac{1.09^3(1.09-1)}{(1.09^3-1)} \approx 197\,527.38 \text{ eura.}$$

■

Plan otplate zajma, otplatna tablica

Plan otplate zajma bilježi se otplatnom tablicom. Njeno zaglavlje ima sljedeći oblik:

kraj razdoblja	anuitet	kamata	otplatna kvota	ostatak duga

U otplatnoj tablici se za i. razdoblje ($i \in \{1,2,\ldots,n\}$) otplate zajma naznačuje: iznos anuiteta a, kamate I_i, otplatne kvote R_i i ostatka duga C_i na kraju tog razdoblja.

Zajam se otplaćuje jednakim anuitetima a pa u drugi stupac otplatne tablice u svim razdobljima unosimo a. Kamata I_i se na kraju i-tog razdoblja računa po jednostavnom kamatnom računu na svotu ostatka duga C_{i-1} iz prethodnog razdoblja:

$$I_i = C_{i-1}p. \tag{2.17}$$

Anuitet je jednak zbroju kamate i otplatne kvote, to jest

$$a = I_i + R_i. \tag{2.18}$$

Dakle, znamo odrediti i iznos otplatne kvote R_i na kraju i-tog razdoblja:

$$R_i = a - I_i. \tag{2.19}$$

Ostatak duga C_i na kraju i-tog razdoblja jednak je ostatku duga C_{i-1} iz prethodnog razdoblja umanjenom za otplatnu kvotu R_i u tom razdoblju, odnosno

$$C_i = C_{i-1} - R_i. \tag{2.20}$$

U tablicu unosimo i nulto razdoblje u kome je ostatak duga jednak C.

■ **Primjer 2.6** Sastavimo otplatnu tablicu za zajam iz prethodnog primjera.

Rješenje: Iznos anuiteta smo izračunali $a = 197527.38$ eura i on je stalan kroz sve godine. Također, $C_0 = C$. Izračunajmo podatke za kraj prve godine:

$$\begin{aligned} I_1 &= C_0 p = 500000 \cdot 0.09 = 45\,000, \\ R_1 &= a - I_1 \approx 152\,527.38, \\ C_1 &= C_0 - R_1 \approx 347\,472.62. \end{aligned}$$

Na kraju druge godine je:

$$\begin{aligned} I_2 &= C_1 p \approx 31\,272.54, \\ R_2 &= a - I_2 \approx 166\,254.84, \\ C_2 &= C_1 - R_2 \approx 181\,217.88. \end{aligned}$$

Slično bismo izračunali podatke za kraj preostale, treće godine. Podatke upišemo u otplatnu tablicu:

i	a	I_i	R_i	C_i
0	-	-	-	500 000
1	197 527.38	45 000	1 52527.38	347 472.62
2	197 527.38	31 272.54	166 254.84	181 217.88
3	197 527.38	16 309.60	181 217.88	0
$\sum$	592 582.14	92582.14	500 000	/

U zadnjem retku tablice su zbrojevi svih elemenata pojedinih stupaca. Ti se zbrojevi koriste pri kontroli točnosti elemenata otplatne tablice.

■

Kontrola točnosti elemenata otplatne tablice

Kako provjeriti je li izrađena otplatna tablica točna? Već se za vrijeme izrade može provesti kontrola točnosti jer za svaki element tablice postoji formula za njegovo izračunavanje, ne preko prethodnih izraza već neovisno o njima. Mi ćemo ovdje navesti kako kontrolirati točnost **gotove** otplatne tablice:

a) otplatnim se kvotama otplaćuje dug, znači **zbroj svih otplatnih kvota jednak je iznosu zajma** C,
b) **zbroj svih anuiteta jednak je iznosu zajma uvećanom za zbroj svih kamata**.

Provjerimo li po ovim elementima otplatnu tablicu iz prethodnog primjera, vidimo da je točna.

2.4 Račun rente

Rentom zovemo plaćanja koja se javljaju u pravilnim vremenskim razmacima. Iznosi plaćanja mogu biti jednaki ili promjenjivi, mogu se uplaćivati ili isplaćivati početkom (prenumerando) ili krajem (postnumerando) razdoblja. Razlikujemo:

1. uplate: rentni iznosi r uplaćuju se na neki račun i ukamaćuju po složenom kamatnom računu za višestruke uplate,

2. isplate: rentni iznosi r isplaćuju se od uloženog iznosa (glavnice) ukamaćenog po složenom kamatnom računu. Primjenjuju se izrazi kao kod otplate zajmova s razlikom što anuitet zovemo renta. Ukoliko je iznos rente manji od do tada dospjelih kamata, govori se o **vječnoj renti**.

■ **Primjer 2.7** Od iznosa 200000 eura se kroz 15 godina isplaćuju jednaki iznosi rente krajem godine. Koliki su iznosi rente ako je fiksni godišnji kamatnjak 9%, a obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan?

Rješenje:

$$C = 200\,000$$
$$n = 15$$
$$p = 9,\ q = 1.09.$$

Da bismo izračunali iznos rente, koristimo izraz kao kod računanja anuiteta:

$$r = C \cdot \frac{q^n(q-1)}{q^n - 1} \approx 24\,811.78 \text{ eura.}$$

■

2.5 Račun otpisa

Kod dobara kojima se zbog habanja ili starenja smanjuje vrijednost, jednom godišnje provodi se otpis (amortizacija). Otpisivanjem se u danoj godini vrijednost s početka godine reducira na ostatak vrijednosti na kraju godine. U računu ćemo koristiti oznake:

- A - iznos nabavne vrijednosti dobra,
- N - trajanje dobra izraženo u godinama,
- R_n - iznos ostatka vrijednosti nakon n godina,
- a_n - iznos otpisne kvote u n-toj godini otpisa.

Ako su otpisne kvote a_n jednake u svakoj godini otpisa, govorimo o **linearnom otpisivanju**. Ako su otpisne kvote opadajuće, govorimo o **degresivnom otpisivanju**.

2.5.1 Linearno otpisivanje

Kod **linearnog otpisivanja** su godišnji iznosi otpisa konstantni: $a_n = a$. Neka je A nabavna vrijednost dobra, N njegovo trajanje u godinama, a R_N ostatak cijene nakon isteka vremena trajanja dobra. Jednake godišnje iznose otpisa računamo po formuli

$$a = \frac{A - R_N}{N}. \tag{2.21}$$

Ostatak vrijednosti dobra nakon n godina jednak je

$$R_n = A - na,\ n \leq N. \tag{2.22}$$

■ **Primjer 2.8** Nabavna cijena stroja iznosi $A = 50\,000$ eura. Otpišimo ga linearno za $N = 5$ godina na ostatak vrijednosti $R_5 = 10\,000$ eura.

Rješenje: Jednake otpisne kvote imaju iznos:

$$a = \frac{A - R_N}{N} = \frac{50000 - 10000}{5} = 8\,000 \text{ eura.}$$

Nabavna se vrijednost stroja na kraju svake godine otpisa umanjuje za 8000 eura. Dakle, ostatak vrijednosti nakon prve godine otpisa je $R_1 = 42000$ eura. Računajući dalje dobivamo:

$$R_2 = 34\,000, R_3 = 26\,000, R_4 = 18\,000, R_5 = 10\,000.$$

Kako je i traženo, stroj je u 5 godina otpisan do ostatka vrijednosti od 10 000 eura. Možemo sastaviti plan otpisa:

godina	poč. vr. R_{n-1}	otp. kvota a	ostatak vr. R_n	% otpisa, $p_n = \frac{a}{R_{n-1}} \cdot 100$
1	50 000	8 000	4 2000	16.0
2	42 000	8 000	34 000	19.05
3	34 000	8 000	26 000	23.53
4	26 000	8 000	18 000	30.77
5	18 000	8 000	10 000	44.44

U zadnjem stupcu tablice izračunati su postotci otpisa. Postotak otpisa p_n svote a od početne vrijednosti R_{n-1} računamo po formuli $\frac{a}{R_{n-1}} \cdot 100$. Kod linearnog otpisivanja vidljiv je jaki porast postotaka otpisa u odnosu na svaku sljedeću početnu vrijednost. To je "mana" linearnog otpisivanja.

∎

U primjeru smo vidjeli da postotci otpisa kod linearnog otpisivanja rastu. Želimo li postotke otpisa ujednačiti, jasno je da iznose otpisa treba s vremenom umanjivati. To je slučaj kod degresivnog otpisivanja.

2.5.2 Aritmetičko-degresivno otpisivanje

Slučaj **aritmetičko-degresivnog otpisa** jest slučaj kad se godišnje otpisne kvote umanjuju za stalan iznos d. One tada čine (padajući) aritmetički niz. Kod ovog otpisa poznata je prva otpisna kvota a_1, nabavna vrijednost dobra A i ostatak vrijednosti R_N. Iznos d umanjenja godišnje otpisne kvote da se izračunati. Naime, otpisne kvote su redom

$$a_1, a_2 = a_1 - d, \ldots, a_N = a_1 - (N-1)d. \tag{2.23}$$

Znamo da je zbroj svih otpisnih kvota u N godina otpisa jednak ukupnom iznosu otpisa, tj.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_N = A - R_N. \tag{2.24}$$

Prema izrazu za zbroj prvih N članova padajućeg aritmetičkog niza slijedi

$$\frac{N}{2}(2a_1 - (N-1)d) = A - R_N. \tag{2.25}$$

Želimo odrediti d. Iz $Na_1 - \frac{N(N-1)}{2}d = A - R_N$ slijedi da je

$$\frac{N(N-1)}{2}d = Na_1 - (A - R_N). \tag{2.26}$$

Izraz za iznos razlike d za koju se umanjuju otpisne kvote pri aritmetičko-degresivnom otpisivanju, a uz zadane iznose prve otpisne kvote a_1, vremena otpisa N te početne vrijednosti A i ostatka vrijednosti R_N je

$$d = 2\frac{[Na_1 - (A - R_N)]}{N(N-1)}. \tag{2.27}$$

■ **Primjer 2.9** Nabavna cijena stroja iznosi $A = 50\,000$ eura. Stroj treba u roku od $N = 5$ godina aritmetičko-degresivnom metodom otpisati do vrijednosti $R_5 = 10\,000$ eura pri čemu se u prvoj godini otpisuje $a_1 = 15\,000$ eura. Sastavimo plan otpisa.

Rješenje: Prvo po formuli izračunamo da je iznos d umanjenja otpisnih kvota jednak 3 500 eura. Sastavimo tablicu:

god.	poč. vr. R_{n-1}	otp. kvota a	ostatak vr. R_n	% otpisa, p_n
1	50 000	15 000	35 000	30
2	35 000	11 500	23 500	32.90
3	23 500	8 000	15 500	34.00
4	15 500	4 500	11 000	29.00
5	11 000	1 000	10 000	9.10

■

Iz tablice u primjeru vidimo da su postotci otpisa (s iznimkom onog u posljednjoj godini) kod aritmetičko-degresivne metode uravnoteženiji nego kod linearnog otpisa. Primijetimo da otplatne kvote čine padajući aritmetički niz: svaka sljedeća je za 3 500 eura manja od prethodne.

2.5.3 Geometrijsko-degresivno otpisivanje

Kod metode geometrijsko-degresivnog otpisa se svake godine otpisuje $p\%$ ostatka vrijednosti iz prethodne godine. Dakle, postotak otpisa je fiksan i iznosi p. Ostatak vrijednosti nakon godinu dana je

$$R_1 = A - A \cdot p = A\,(1-p)\,. \tag{2.28}$$

Dalje je

$$R_2 = R_1 - R_1 \cdot p = R_1\,(1-p) = A\,(1-p)^2\,. \tag{2.29}$$

Općenito je

$$R_n = A\,(1-p)^n\,. \tag{2.30}$$

Vidimo otkud metodi naziv: ostatci vrijednosti čine geometrijski niz čiji je prvi član $A\,(1-p)$, a kvocijent $1-p$. U pravilu je u računu zadano A, a na temelju zadanih dviju od triju preostalih veličina R_n, p i n odredi se nepoznata veličina.

■ **Primjer 2.10** Stroj nabavne vrijednosti 50 000 eura otpišimo kroz 4 godine geometrijsko-degresivnom metodom uz 20 % vrijednosti godišnje.

Rješenje:

$$A = 500000$$
$$n = 4$$
$$p = 20\% = 0.20.$$

Računamo ostatke vrijednosti:

$$R_1 = 50000\,(1-0.20) = 40000, R_2 = 50000\,(1-0.20)^2 = 32000, R_3 = 25600, R_4 = 20480.$$

Tablica otpisa je

god.	poč. vr. R_{n-1}	otp. kvota a	ostatak vr. R_n	% otpisa, p_n
1	50 000	10 000	40 000	20
2	40 000	8 000	32 000	20
3	32 000	6 400	25 600	20
4	25 600	5 120	20 480	20

Vježba: Nakon kojeg vremena će vrijednost stroja pasti ispod 1 000 eura?

■

2.6 Zadatci za vježbanje

1. Osoba uplaćuje iznos od 5 000 eura na kraju svake godine kroz 6 godina. Izračunajte iznos kojim raspolaže po isteku štednje ako je obračun kamata godišnji, složen i dekurzivan uz fiksni godišnji kamatnjak $p = 5$.
2. Koliki iznos valja uplaćivati u banku početkom svake godine ako se na kraju osme godine na osnovi tih uplata želi raspolagati iznosom od 7 000 eura? Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan i primjenjuje se kamatna stopa 8.8%.
3. Neka osoba ima otvorena dva računa štednje: na jednoga je jednokratno uložila 10 000 eura uz godišnju kamatnu stopu od 3.5, a na drugoga krajem svake godine uplaćuje po 1 200 eura uz kamatnu stopu od 4% godišnje. Na kojem od ta dva računa će osoba nakon 8 godina imati veću svotu novaca ako je na oba obračun kamata godišnji, složen i dekurzivan?
4. Izračunajte kolika je konačna vrijednost na računu po isteku 15 godina štednje ako osoba na račun krajem svake godine kroz prvih 10 godina štednje uplaćuje iznos od 600 eura, a dalje novci leže na računu sljedećih 5 godina. Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivni uz fiksni godišnji kamatnjak $p = 4$.
5. Zajam od 500 000 eura je odobren na 10 godina uz 9% godišnjih kamata i otplaćuje se jednakim anuitetima a na kraju godine. Odredite a.
6. Zajam se otplaćuje kroz 15 godina jednakim anuitetima a iznosa 2 000 eura na kraju mjeseca uz 6% godišnjih kamata. Odredite iznos zajma.
7. Zajam od 150 000 eura odobren je tvrtki na 5 godina uz 4% kamata i plaćanje postnumerando anuitetima koji su nominalno jednaki. Sastavite otplatnu tablicu.
8. Izradite otplatnu tablicu za plan otplate zajma od 80 000 eura jednakim anuitetima. Zajam je odobren na 8 godina uz 7.5% godišnjih kamata, a obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan.

9. Na početku svake godine kroz 5 godina želimo isplaćivati po 10 000 eura. Koliku svotu treba uložiti na račun ako je kamatna stopa jednaka 5, a obračun kamata godišnji, složen i dekurzivan?
10. Nabavna vrijednost stroja iznosi 12 500 eura . Otpišite ga u roku od 8 godina:
    (a) aritmetičko-degresivnom metodom do iznosa 5 000 eura ako je prva otpisna kvota 2 100 eura
    (b) geometrijsko-degresivnom metodom po 25% godišnje.

Rješenja zadataka

1. 34 009.56 eura
2. 587.62 eura
3. prvi: 13 168.09 eura, drugi: 11 057.07 eura
4. 8 764.36 eura
5. 77 910 eura
6. 237 000 eura
9. 45 459.50 eura

3. Linearna algebra

3.1 Vektori u n-dimenzionalnom realnom prostoru

Vektori u n-dimenzionalnom realnom prostoru $\mathbb{R}^n$ su uređene n-torke realnih brojeva. Dakle, vektor $\vec{a}$ zadan je s $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Dva vektora $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ su jednaka ako i samo ako je $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $\cdots$, $a_n = b_n$.

Osnovne računske operacije s vektorima

Neka su zadani vektori $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Definiramo:

1. **zbroj vektora** $\vec{a}$ i $\vec{b}$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n), \tag{3.1}$$

2. **razliku vektora** $\vec{a}$ i $\vec{b}$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n), \tag{3.2}$$

3. **skalarni produkt** vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kao broj

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n, \tag{3.3}$$

4. **množenje vektora skalarom**: za vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n), \tag{3.4}$$

5. **duljinu vektora** $\vec{a}$ s

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2}. \tag{3.5}$$

Duljina vektora naziva se još i **norma** vektora ili **apsolutna vrijednost** vektora. Kao što vidimo iz definicija, $\|\vec{a}\|$ se računa po formuli

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}. \tag{3.6}$$

Istaknuti vektor u $\mathbb{R}^n$ je **nul-vektor**, u oznaci $\vec{0}$; $\vec{0} = (0,0,\dots,0)$. Posebno se označavaju i vektori: $\vec{e_1} = (1,0,0,\dots,0)$, $\vec{e_2} = (0,1,0,\dots,0)$, $\dots$, $\vec{e_n} = (0,0,0\dots,1)$. Svaki vektor $\vec{a} = (a_1,a_2,\dots,a_n)$ možemo zapisati kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{e_1},\vec{e_2},\dots,\vec{e_n}$:

$$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + \cdots a_n\vec{e_n}. \tag{3.7}$$

Definicija 3.1.1 — Linearna nezavisnost vektora. Vektori $\vec{a_1},\vec{a_2},\dots,\vec{a}_m$, $m \in \mathbf{N}$, $\vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ za sve $k \in \{1,2,\dots m\}$ su **linearno nezavisni** ako iz

$$\alpha_1\vec{a_1} + \alpha_2\vec{a_2} + \cdots + \alpha_m\vec{a}_m = \vec{0} \tag{3.8}$$

slijedi $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$. Vektore koji nisu linearno nezavisni zovemo **linearno zavisnima**.

Vektori $\vec{e_1},\vec{e_2},\dots,\vec{e_n}$ n-dimenzionalnog realnog prostora $\mathbb{R}^n$ su linearno nezavisni. Naime, za $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,\dots,n$ jednadžba

$$\alpha_1\vec{e_1} + \alpha_2\vec{e_2} + \cdots + \alpha_n\vec{e_n} = \vec{0} \tag{3.9}$$

povlači

$$(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) = \vec{0}, \tag{3.10}$$

što vrijedi ako i samo ako je $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

■ **Primjer 3.1** Jesu li vektori $\vec{a_1} = (2,-3,1)$, $\vec{a_2} = (1,1,1)$ i $\vec{a_3} = (0,1,-1)$ linearno nezavisni u $\mathbb{R}^3$?

Rješenje: Želimo znati za koje realne brojeve $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ je

$$\alpha_1\vec{a_1} + \alpha_2\vec{a_2} + \alpha_3\vec{a_3} = \vec{0}.$$

Uvrstimo vektore:

$$\alpha_1(2,-3,1) + \alpha_2(1,1,1) + \alpha_3(0,1,-1) = (0,0,0).$$

Sredimo izraz s lijeve strane; dobivamo

$$(2\alpha_1 + \alpha_2, -3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) = (0,0,0).$$

Rješavanjem sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + \alpha_2 \qquad &= 0 \\ -3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

dobivamo da je $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Zaključujemo da zadani vektori jesu linearno nezavisni.

■

3.2 Matrice

Definicija 3.2.1 — Matrica. Matrica A tipa $m \times n$ je tablica od $m \cdot n$ elemenata (realnih brojeva) koji su svrstani u m redaka i n stupaca:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

Kraće se piše $A = (a_{ij})$. Element a_{ij} matrice A nalazi se na sjecištu i-tog retka i j-tog stupca.
Ako je $m = n$, matricu A zovemo **kvadratna matrica reda** n. **Glavnu dijagonalu** kvadratne matrice A reda n čine elementi: $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$, a njenu **sporednu dijagonalu** čine elementi: $a_{1n}, a_{2n-1}, \ldots, a_{n1}$.

3.2.1 Posebne matrice

1. **Nul-matricom** zovemo matricu bilo kojeg tipa čiji su svi elementi jednaki 0:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

2. Matrica tipa $n \times 1$ zove se **vektor-stupac**. Matrica tipa $1 \times n$ zove se **vektor-redak**.
3. Kvadratnu matricu reda n u kojoj su elementi na glavnoj dijagonali jednaki 1, a svi izvan nje 0, označavamo s I_n i zovemo **jedinična matrica** reda n. Dakle,

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

4. **Dijagonalnom matricom** zovemo kvadratnu matricu kojoj su svi elementi izvan glavne dijagonale jednaki 0:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

5. Kvadratnu matricu zovemo **gornje-trokutasta** ako su joj svi elementi ispod glavne dijagonale

jednaki 0:

$$G_T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

6. **Donje-trokutasta** je ona kvadratna matrica u kojoj su svi elementi iznad glavne dijagonale jednaki 0:

$$D_T = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & a_{n-1\,3} & \cdots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

3.2.2 Operacije s matricama

Posebna operacija nad matricama je **transponiranje**. Za matricu $A = (a_{ij})$ tipa $m \times n$, transponirana matrica je matrica

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Uočavamo da pri transponiranju matrice retci postaju stupci i obratno.

■ **Primjer 3.2** Transponirajmo matricu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

■

Definicija 3.2.2 — Simetrična matrica. Kvadratnu matricu zovemo **simetričnom** ako je $A^T = A$, a **antisimetričnom** ako je $A^T = -A$.

Slijedi definiranje računskih operacija s matricama.

A) **Zbrajanje matrica**
Matrice je moguće zbrojiti samo ako su istog tipa. Imamo li matrice $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$, obje tipa $m \times n$, njihov je zbroj matrica $C = (c_{ij})$ tipa $m \times n$, pri čemu je

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ 1 \le i \le m, 1 \le j \le n. \tag{3.18}$$

Pišemo $A + B = C$. Elementi matrice C dobiveni su zbrajanjem odgovarajućih elemenata matrica A i B. Pogledajmo primjer.

■ **Primjer 3.3**

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

■

B) **Množenje matrice skalarom**
Ako je zadan $\alpha \in \mathbb{R}$ i matrica $A = (a_{ij})$ tipa $m \times n$, onda je matrica αA tipa $m \times n$ i zadana je kao

$$\alpha A = (\alpha a_{ij}). \tag{3.19}$$

■ **Primjer 3.4**

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

■

Definicija 3.2.3 — Suprotna matrica. Suprotna matrica matrice A je matrica $-A = (-a_{ij})$.

C) **Oduzimanje matrica**
Neka su A i B matrice istog tipa. Tada je

$$C = A - B = A + (-B). \tag{3.20}$$

Oduzeti matricu B od matrice A znači zbrojiti matricu A sa suprotnom matricom matrice B.

■ **Primjer 3.5** Odredite $3A - 2B$ za matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad 3A - 2B = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 8 \\ 8 & 1 & 9 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

■

Svojstva zbrajanja i oduzimanja matrica

1. Zbrajanje matrica je **komutativno**. Ako su matrice A i B istog tipa, tada je

$$A + B = B + A. \tag{3.21}$$

2. Zbrajanje matrica je **asocijativno**. Ako su matrice A, B, C istog tipa, tada je

$$A + (B + C) = (A + B) + C. \tag{3.22}$$

3. Nul-matrica (odgovarajućeg tipa) je **neutralni element** za zbrajanje matrica, to jest vrijedi

$$O + A = A + O = A. \tag{3.23}$$

4. Zbroj matrice i njoj suprotne matrice je nul-matrica istog tipa:

$$A + (-A) = O \tag{3.24}$$

D) **Množenje matrica**
Množenje matrica je nešto složenija operacija. Matrice možemo množiti **samo ako su ulančane**, to jest, ako je broj stupaca prve matrice jednak broju redaka druge matrice. Ako su matrice A i B ulančane i A je tipa $m \times n$, tada B mora biti tipa $n \times r$ za neki $r \in \mathbf{N}$.
Produkt matrica A i B, pri čemu je matrica A tipa $m \times n$, a matrica B tipa $n \times r$ je matrica C tipa $m \times r$, $C = A \cdot B = (c_{ij})$. Pritom je

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}. \tag{3.25}$$

R Množenje matrica možemo vizualizirati na sljedeći način. Svaki od m redaka matrice A možemo smatrati jednim vektorom, dakle imamo vektore:

$$\vec{a_i} = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}),\ \ i = 1 \ldots, m.$$

Slično, svaki od r stupaca matrice B također možemo smatrati jednim vektorom, pa imamo vektore:

$$\vec{b_j} = (b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj}),\ \ j = 1, \ldots r.$$

Primijetimo da su zbog ulančanosti matrica A i B vektori $\vec{a_i}$, $\vec{b_j}$ za sve i, j elementi od $\mathbb{R}^n$. Element c_{ij} matrice $C = A \cdot B$ dobivamo tako da skalarno pomnožimo $\vec{a_i}$ s $\vec{b_j}$; dakle, vektor iz i. retka matrice A skalarno množimo s vektorom iz j. stupca matrice B. Kako imamo m vektora-redaka u A i r vektora stupaca u B, mogućih umnožaka ima $m \cdot r$.

■ **Primjer 3.6** Pomnožimo matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rješenje: Matrice A i B su ulančane: prva je tipa 3×2, druga 2×2. Zato možemo izračunati $A \cdot B$ i umnožak je matrica tipa 3×2. Da bismo dobili element na mjestu $(1,1)$ umnoška, množimo skalarno vektor iz 1. retka matrice A s vektorom iz 1. stupca matrice B. Dalje, element umnoška na mjestu $(1,2)$ dobivamo kao skalarni produkt vektora iz 1. retka matrice A i vektora iz 2. stupca matrice B. Općenito, na mjestu (i, j) umnoška stoji skalarni produkt vektora iz i. retka matrice A s vektorom iz j. stupca matrice B. Pišemo

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ \mathbf{-1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)} & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) & 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) & 3 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Uočimo da produkt $B \cdot A$ nije definiran jer u ovom poretku B i A nisu ulančane. Naime, B je tipa 2×2, a A tipa 3×2.

■

■ **Primjer 3.7** Odredimo $A\cdot B$ i $B\cdot A$ ako su zadane kvadratne matrice

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rješenje: Matrice su ulančane u oba poretka množenja, pa su oba produkta dobro definirana.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 1+1\cdot(-1) & 2\cdot 0+1\cdot 1 \\ 0\cdot 1+(-1)\cdot(-1) & 0\cdot 0+(-1)\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 2+0\cdot 0 & 1\cdot 1+0\cdot(-1) \\ -1\cdot 2+1\cdot 0 & -1\cdot 1+1\cdot(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

■

Vidimo iz primjera da množenje matrica **nije komutativno**. Čak i ako je moguće izračunati $A\cdot B$ i $B\cdot A$, općenito

$$A\cdot B\neq B\cdot A. \tag{3.26}$$

Svojstva množenja matrica

1. Množenje matrica **je asocijativno**, to jest, ako je moguće izvesti sve navedene operacije, tada je

$$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C). \tag{3.27}$$

2. **Množenje matrica je distributivno prema zbrajanju matrica**: ako je moguće izvesti sve navedene operacije, tada je

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C \tag{3.28}$$
$$(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C \tag{3.29}$$

3. Neka je A kvadratna matrica reda n. Tada je

$$A\cdot I_n=I_n\cdot A=A. \tag{3.30}$$

   Kažemo da je jedinična matrica reda n **jedinični element** za množenje s matricama reda n.

4. Matrica A pomnožena nul-matricom odgovarajućeg tipa kao rezultat daje nul-matricu:

$$A\cdot O=O\cdot A=O. \tag{3.31}$$

■ **Primjer 3.8** Odredimo umnožak $A\cdot B$ matrica

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

■

■ **Primjer 3.9** Odredimo a i b tako da vrijedi

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & a \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Rješenje: Kad odredimo umnožak matrica s lijeve strane jednakosti, dobivamo

$$\begin{pmatrix} 2b-1 & 2a+1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Iz ovoga vidimo da će matrice biti jednake ako je $2b-1=10$ i $2a+1=1$, tj. $a=0, b=11/2$. ■

Ako je zadana kvadratna matrica A, možemo definirati potencije matrice A:

$$A^2 = A \cdot A, A^3 = A \cdot A \cdot A, \ldots \tag{3.32}$$

■ **Primjer 3.10** Za zadanu matricu $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ i funkciju $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$ odredimo $f(A)$.

Rješenje: Računamo $f(A) = 2A^2 + 3A - 4I_2$. Ovdje je

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}, \; I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rješenje je $f(A) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -15 \\ 0 & 40 \end{pmatrix}$. ■

3.2.3 Rang matrice

Možemo smatrati da su u retke (stupce) matrice složeni vektori. Naučit ćemo kako uz pomoć elementarnih transformacija nad matricom odrediti najveći broj linearno nezavisnih vektora među svim vektorima u matrici. Budući da razlikujemo vektore u retcima matrice i one u stupcima matrice, važno je znati sljedeće.

Teorem 3.2.1 — Broj linearno nezavisnih redaka matrice. Najveći broj linearno nezavisnih redaka matrice A jednak je najvećem broju linearno nezavisnih stupaca matrice A.

Definicija 3.2.4 — Rang matrice. Najveći broj (r) linearno nezavisnih redaka (stupaca) matrice A zovemo **rang matrice** A i pišemo rang $A = r$.

■ **Primjer 3.11** Matrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

očigledno je ranga 1 jer ima dva jednaka stupca. ■

Određivanje ranga matrice

Općenito se rang matrice određuje **Gaussovim algoritmom**. Opisujemo ga u nastavku. Rang matrice određuje se provođenjem elementarnih transformacija nad retcima (stupcima) matrice. Elementarne transformacije su:

1. međusobna zamjena dvaju redaka (stupaca) matrice,
2. množenje retka (stupca) matrice brojem različitim od 0,
3. dodavanje retka (stupca) matrice drugom retku (stupcu) matrice.

Primjenom elementarnih transformacija ne mijenja se rang matrice, a matricu transformiramo u gornje-trokutastu. Pokazuje se da je rang tako transformirane matrice jednak broju redaka (stupaca) koji su različiti od nul-vektora.
Ovdje ćemo, budući je to dovoljno za kasnije primjene, Gaussov algoritam provoditi samo nad retcima matrice. U tom je slučaju rang matrice jednak broju redaka koji su različiti od nul-vektora.

■ **Primjer 3.12** Matrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

očigledno je ranga 1 jer ima dva jednaka stupca. Kad bismo joj određivali rang, sveli bismo je na gornje-trokutasti oblik.
Ispod broja 1 koji se nalazi na mjestu $(1,1)$ trebamo imati 0, stoga taj element proglasimo **pivotnim elementom** (razrješnim elementom). Nad matricom smijemo provoditi elementarne transformacije jer one čuvaju rang matrice. Kad od drugog retka oduzmemo dvostruki prvi redak na mjestu $(2,1)$ matrice dobivamo 0:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ II-2I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Redak u kome je uzet pivotni element se pri provođenju elementarnih transformacija ne mijenja već se prepisuje dalje. Naznačene operacije provode se napamet; rezultat se zapisuje u redak koji transformiramo. U dobivenoj gornje-trokutastoj matrici imamo samo jedan vektor (redak) različit od nul-vektora. Dakle, rang matrice A jednak je 1. ■

■ **Primjer 3.13** Odredimo rang matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Rješenje: Proglasimo element 1 na mjestu $(1,1)$ pivotnim elementom. Želimo na mjestima $(2,1)$ i $(3,1)$ dobiti 0. To ćemo postići ako od II. retka oduzmemo trostruki I. redak te kad III. redak zbrojimo s I. retkom. Redak u kome je pivotni element prepisujemo, ostale retke transformiramo:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ II-3I \\ III+I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Sada za pivotni element uzimamo broj 1 na mjestu $(2,2)$. Kako matricu želimo svesti na gornje-trokutast oblik, moramo ispod glavne dijagonale imati same 0. Prvi redak prepišemo, drugi također. Element 1 na mjestu $(3,2)$ pretvorit ćemo u 0 kad od III. retka oduzmemo II. redak.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ III-II \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrica A svedena je na gornje trokutasti oblik. Niti u jednom retku nemamo nul-vektor pa zaključujemo da rang matrice A iznosi 3.

■

Primijetimo da je za pivotni element dobro imati broj 1 jer je tada olakšano "poništavanje" elemenata ispod pivotnog. Naime, jednostavno množimo redak u kojemu je uzet pivotni element brojem suprotnim elementu kojeg poništavamo i zbrojimo odgovarajuće retke.

■ **Primjer 3.14** Odredimo rang matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -4 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rješenje:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -4 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ II-2I \\ III+I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & \boxed{2} & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ /:2 \\ III+II \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Primijetite da je u zadnjem koraku računa drugi redak matrice podijeljen brojem 2. Matrica B je ranga 2.

■

■ **Primjer 3.15** Odredimo rang matrice

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rješenje: Kako bismo na mjestu (1,1), gdje stoji element 2 dobili 1 koji je najpogodniji da bude razrješni element, vršimo elementarnu transformaciju zamjene dvaju redaka pa prije početka postupka mijenjamo prvi i drugi redak.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ II-2I \\ III-I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{-5} & -5 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ III-II \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Rang matrice C je 3.

■

Vježba 3.1 Odredimo rang matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. rang $B = 3$.

3.3 Zadatci za vježbanje

1. Za zadane matrice A, B i C

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

izračunajte:

(a) $A - B + C$
(b) $2A + B - C$
(c) $A \cdot C^T$
(d) $(A - C) \cdot B^T$

2. Odredite umnožak matrica $A \cdot B$ za

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Je li moguće odrediti $B \cdot A$? Ako jest, odredite.

3. Provjerite da za matricu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vrijedi $A^2 = 0$.

4. Odredite a i b tako da vrijedi

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ 2 & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Odredite rang matrica

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -5 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

Rješenja zadataka

1. (a) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} -2 & 15 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 15 & -3 \end{pmatrix}$

2. $A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

3. $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. $a = 0, b = -1$

5. (a) 2
   (b) 3
   (c) 3

4. Rješavanje sustava, inverz matrice

4.1 Matrice u rješavanju sustava linearnih jednadžbi

Definicija 4.1.1 — Sustav linearnih jednadžbi. Neka su $m,n \in \mathbf{N}$ i $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ za $1 \leq i \leq m$ i $1 \leq j \leq n$. Sustav od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je sustav oblika

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m.
\end{aligned}
$$

Realni brojevi a_{ij} zovu se **koeficijenti sustava**. Koeficijente sustava možemo zapisati u matricu sustava

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{4.1}
$$

Brojeve b_i zovemo **slobodnim koeficijentima**. Slobodne koeficijente i nepoznanice zapisujemo kao vektor-stupce b i x

$$
b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{4.2}
$$

Sada sustav iz definicije možemo zapisati u matričnom obliku kao $Ax = b$.
Sustav je **rješiv** ako postoji barem jedan vektor x koji uvršten u matričnu jednadžbu $Ax = b$ daje istinitu jednakost. Ima sustava koji nisu rješivi. Pitanje rješivosti sustava ilustriramo na primjeru sustava od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice.
Znamo da svaka jednadžba sustava od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice određuje pravac u koordinatnom sustavu. Rješenje sustava je točka u koordinatnom sustavu u kojoj se zadana dva pravca sijeku.

- Neka je zadan sustav
$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 5 \\ x - y &= 2. \end{aligned}$$
Budući su zadani različiti neparalelni pravci, njihovo sjecište postoji i jedinstveno je određeno. Stoga i sustav jednadžbi ima jedinstveno rješenje. (Odredite ga!).

- Jednadžbe sustava
$$\begin{aligned} -x + y &= 1 \\ -x + y &= 5. \end{aligned}$$
zadaju paralelne i različite pravce. Kako se različiti paralelni pravci ne sijeku, ovaj sustav nema rješenje. Kažemo da je sustav **nemoguć**, nerješiv ili nekonzistentan. Primijetimo da je rang matrice sustava jednak 1.

- Kod sljedećeg sustava obje jednadžbe zadaju jedan te isti pravac.
$$\begin{aligned} -x + y &= 1 \\ -2x + 2y &= 2. \end{aligned}$$
Svaka točka pravc a jest rješenje sustava. Ovaj sustav, dakle, ima beskonačno mnogo rješenja. Kažemo da je **neodređen**.

Općenito vrijedi da sustav od n jednadžbi s n nepoznanica ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je rang matrice koeficijenata sustava jednak n. Sustav linearnih jednadžbi se rješava Gaussovim postupkom. Postupak je sljedeći:

- sastavimo proširenu matricu $(A|b)$,
- nad $(A|b)$ provodimo elementarne transformacije nad retcima da bismo je transformirali u oblik $(I_n|c)$,
- matrica c je vektor rješenja sustava.

Ilustriramo opisani postupak primjerom.

■ **Primjer 4.1** Odredimo rješenje sustava od tri jednadžbe s tri nepoznanice
$$\begin{aligned} 2x + \ y - \ z &= 2 \\ x + 3y + 2z &= 1 \\ x + \ y + \ z &= 2 \end{aligned}$$

Rješenje: Na proširenoj matrici $(A|b)$ vršimo transformacije kako bismo je sveli na gornjetrokutasti oblik. Budući da je zgodno za razješni element imati broj 1, zamjenjujemo mjesta prve i druge jednadžbe. Poništavanja elemenata ispod razrješnog elementa provodimo istodobno.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II-2I \\ III-I \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :(-5) \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III+2II \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Kad je matrica dovedena u gornje-trokutasti oblik, iz trećeg reda matrice (treće jednadžbe) čitamo $z = 1$ $(0x+0y+z=1)$. Potom u drugom retku imamo $y+z=0$ pa je $y=-1$. Na kraju, u prvom retku imamo $x+3y+2z=2$ što uz poznate y i z daje $x=2$. Jedinstveno rješenje sustava je vektor $(2,-1,1)$.

■

■ **Primjer 4.2** Odredimo rješenje sustava od tri jednadžbe s tri nepoznanice

$$\begin{aligned} 3x-4y-\ z &= 1 \\ 2x-3y+\ z &= 1 \\ x-2y+3z &= 2 \end{aligned}$$

Rješenje: Pri formiranju proširene matrice $(A|b)$ odmah zamijenimo mjesta prve i treće jednadžbe kako bismo za razrješni element imali broj 1. Potom vršimo elementarne transformacije i svodimo matricu na gornje-trokutasti oblik.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II-2I \\ III-3I \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -5 & -3 \\ 0 & 2 & -10 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III-2II \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

U trećem redu matrice čitamo $0x+0y+0z=1$ što je nemoguće. Sustav je nemoguć i nema rješenje.

■

■ **Primjer 4.3** Odredimo rješenje sustava od dvije jednadžbe s tri nepoznanice

$$\begin{aligned} -2x+\ y+3z &= -7 \\ x-4y+2z &= 0 \end{aligned}$$

Rješenje: Pri formiranju proširene matrice $(A|b)$ zamijenimo mjesta prve i druge jednadžbe. Potom vršimo elementarne transformacije.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II+2I \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :(-7) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Ovaj je sustav neodređen i ima beskonačno puno rješenja koja zapisujemo parametarski. Postupak je sljedeći. U drugom retku matrice čitamo $y - z = 1$. Označimo nepoznanicu z parametrom $t, t \in \mathbb{R}$. Sada je $y = t + 1$. S dobivenim izrazima idemo u jednadžbu iz prvog retka: $x - 4(t+1) + 2t = 0$ i odredimo x, $x = 2t + 4$. Rješenja jednadžbe su vektori $(2t+4, t+1, t), t \in \mathbb{R}$. Odabirom vrijednosti t dobivamo konkretan vektor rješenja. Tako je za $t = 0$ to vektor $(4,1,0)$, a za $t = -2$ vektor $(0,-1,-2)$.

■

Vježba 4.1 Odredimo rješenje sustava od tri jednadžbe s tri nepoznanice:

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 2 \\ x + 3y + 2z &= 1 \\ x + y + z &= 2 \end{aligned}$$

$x = 1, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}.$

4.2 Inverz matrice

Definicija 4.2.1 — Regularna matrica, inverzna matrica. Kvadratna matrica A reda n je **regularna** ako postoji matrica B reda n takva da je

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n.$$

Matrica B zove se **inverzna matrica matrice** A. Pišemo $B = A^{-1}$. Matrica koja nije regularna zove se **singularna**.

Teorem 4.2.1 — Rang i regularnost matrice. Kvadratna matrica reda n je regularna ako i samo ako joj je rang maksimalan, odnosno jednak upravo n.

■ **Primjer 4.4** Provjerimo da je sljedeća matrica sama sebi inverzna

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rješenje: Treba provjeriti da je $A^{-1} = A$. No, to je očito budući je $A \cdot A = I_2$. Provjerite množenjem.

■

Postupak određivanja inverza matrice

Kod traženja inverza regularne kvadratne matrice A reda n, radimo sljedeće:

1. pripisivanjem jedinične matrice reda n uz matricu A sastavimo proširenu matricu $(A|I_n)$,
2. provođenjem elementarnih transformacija nad retcima dovedemo načinjenu proširenu matricu do oblika $(I_n|B)$,
3. $B = A^{-1}$, dakle, na desnoj strani dobivene proširene matrice je inverz matrice A.

Algoritam po kojem radimo je opet Gaussov. Makar je postupak određivanja inverza naveden za regularnu kvadratnu matricu, možemo ga provoditi i za matricu A za koju ne znamo je li regularna. Naime, ukoliko načinjenu proširenu matricu $(A|I_n)$ ne uspijemo transformirati u oblik $(I_n|B)$, odnosno ne uspijemo slijeva dobiti I_n, znači da je polazna matrica A singularna.

■ **Primjer 4.5** Odredimo inverz matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rješenje: Načinimo proširenu matricu, matrici A s desne strane pripišemo jediničnu matricu reda 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Cilj je postupka elementarnih transformacija s lijeve strane proširene matrice dobiti jediničnu matricu. To se provodi "poništavanjem" svih elemenata van glavne dijagonale. Postupak je dakle sličan onome kod određivanja ranga, samo što sada treba u 0 pretvoriti ukupno šest brojeva. Postupak provodimo nad retcima, a u preračunavanje su ravnopravno uključeni i elementi pripisane jedinične matrice. Za prvi pivotni element biramo broj 1 na mjestu $(1,1)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ II-2I \\ III-3I \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ :(-2) \\ :(-3) \end{array} \sim$$

Element -2 na mjestu $(2,2)$ već ima iznad i ispod sebe 0. To znači da treba samo cijeli II redak podijeliti s -2 kako bismo na mjestu $(2,2)$ imali broj 1. Kad se to napravi prva su dva stupca poput onih u jediničnoj matrici. Treba još i element na mjestu $(3,3)$ pretvoriti u 1 pa treći red dijelimo s -3. Dobivamo razrješnu jedinicu

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & -1/3 \end{array}\right) \begin{array}{c} I-III \\ II-3/2III \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1/3 \end{array}\right).$$

Inverz matrice A je

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Lako je provjeriti jesmo li dobro izračunali. Znamo da treba biti $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$. Provjerite sami množenjem!

■

■ **Primjer 4.6** Odredimo inverz matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Rješenje: Napišimo proširenu matricu. Prvi redak dijelimo s 2 da na mjestu $(1,1)$ dobijemo pivotni element 1:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} :2 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} \boxed{1} & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

"Poništimo" sve elemente prvog stupca osim pivotnog elementa. Pišemo odjednom:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II-3I \\ III+1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Sad je pivotni element 1 na mjestu $(2,2)$. Iznad njega već stoji 0. Poništavamo jedinicu koja je ispod njega:

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III-II \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Na kraju poništimo sve elemente trećeg stupca iznad pivotnog elementa 1 na mjestu $(3,3)$:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} I-2III \\ II+III \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{2} & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Dobili smo inverz matrice A,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & 2 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

■ **Primjer 4.7** Odredimo inverz matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rješenje: Matrica B ima rang 3, dakle, regularna je.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III-I \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :(-1) \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Gotovo! Inverz matrice B je

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

Ako je matrica singularna (nema maksimalni rang) inverz joj nije moguće odrediti. To pokazuje sljedeći primjer.

■ **Primjer 4.8** Odredimo inverz matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Rješenje: Napišimo proširenu matricu i provedimo postupke transformacije:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II-2I \\ III+I \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III+II \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Sada vidimo da nije moguće dobiti jediničnu matricu na lijevoj strani proširene matrice jer smo dobili sve 0 u trećem retku. Zaključujemo da je matrica A singularna, odnosno nema inverz.

■

Odakle uopće potreba za znanjem rješavanja sustava linearnih jednadžbi? Sustav linearnih jednadžbi je matematički model za mnoštvo realnih problema. Evo primjera.

■ **Primjer 4.9** Službenik u banci ima pred sobom svežanj od 70 novčanica u apoenima od 5, 10 i 20 eura. Znamo da novčanica od 5 eura ima tri puta više od onih od 10 eura i da je ukupni iznos vrijednosti svih 70 novčanica 960 eura. Koliko je novčanica pojedine vrste u svežnju?

Rješenje: Označimo s

- x - broj novčanica od 5 eura,
- y - broj novčanica od 10 eura,
- z - broj novčanica od 20 eura.

Znamo da je sveukupno 70 novčanica, dakle $x+y+z=70$. Dalje, novčanica od 5 eura je tri puta više od onih od 10 eura, tj. $x=3y$. Na kraju, iznos vrijednosti svih novčanica je 960 eura, znači $5x+10y+20z=960$. Imamo sustav

$$\begin{aligned} x+\quad y+\quad z &= 70 \\ x-\quad 3y\qquad &= 0 \\ 5x+10y+20z &= 960 \end{aligned}$$

Rješenje sustava je $x=24$, $y=8$, $z=38$ tj. vektor $\begin{pmatrix} 24 \\ 8 \\ 38 \end{pmatrix}$.

■

U ekonomiji se još češće nego sustavi linearnih jednadžbi susreću sustavi linearnih nejednadžbi. Primjerice, oni čine skup ograničenja u tzv. problemu linearnog programiranja. Na kraju udžbenika (vidi A) dodano je, za one koji žele znati više, poglavlje o problemima linearnog programiranja i metodi njihova grafičkog rješavanja. Ovdje napominjemo samo da problem linearnog programiranja ima funkciju cilja (npr. funkciju troška ili dobiti) koju treba optimizirati (minimizirati ili maksimizirati) na skupu mogućih rješenja koji se dobiva kao rješenje sustava linearnih nejednadžbi (koje potječu od tehnoloških zahtjeva proizvodnje ili zahtjeva ulaganja).

Inverzna matrica u rješavanju sustava linearnih jednadžbi i matričnih jednadžbi

Spomenuli smo da svaki sustav linearnih jednadžbi možemo zapisati u matričnom obliku

$$Ax=b, \tag{4.3}$$

gdje je A matrica sustava, a b je vektor-stupac slobodnih koeficijenata. Ukoliko je matrica A kvadratna i regularna, x možemo odrediti rješavanjem matrične jednadžbe $Ax=b$. Jednadžbu $Ax=b$ pomnožimo slijeva inverzom matrice A i dobivamo

$$A^{-1}Ax=A^{-1}b, \tag{4.4}$$

odnosno

$$x=A^{-1}b. \tag{4.5}$$

Vidimo da vektor rješenja sustava dobijemo kao umnožak inverza matrice sustava i matrice slobodnih koeficijenata.

■ **Primjer 4.10** Odredimo inverz matrice iz primjera 4.1 i uz pomoć njega riješimo dani sustav.

Rješenje: Sustav iz primjera 4.1 možemo zapisati u matričnom obliku $Ax=b$ za

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Stoga je $x=A^{-1}b$. Dakle, kad odredimo inverz matrice A, vektor rješanja dobiva se množenjem njega i vektora slobodnih koeficijenata. Rješenje je

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & -1 \\ 1/5 & 3/5 & -1 \\ -2/5 & -1/5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

■

Budući da množenje matrica nije komutativno, prilikom rješavanja matričnih jednadžbi treba kod množenja inverznom matricom biti na oprezu i množiti s prave strane. U prethodnom primjeru je to bilo s lijeve strane, a u sljedećem je s desne.

■ **Primjer 4.11** Riješite matričnu jednadžbu $XA+B=C$ za matrice

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}.$$

Rješenje: Jednadžbu riješimo: $XA=C-B$. Da dobijemo X, valja maknuti matricu A s lijeve strane. To se postiže množenjem obiju strana jednakosti **zdesna** s A^{-1} tako da je $XAA^{-1}=(C-B)A^{-1}$. No kako je umnožak matrice i njenog inverza jednak jediničnoj matrici, dobivamo $X=(C-B)\cdot A^{-1}$.

$$X=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{10}\begin{pmatrix}4 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-8 & 7\\ -16 & 9\end{pmatrix}.$$

■

4.3 Zadatci za vježbanje

1. Matričnom metodom (Gauss-Jordanovim transformacijama) odredite rješenja sustava:

(a)

$$\begin{aligned} x+3y-6z&=7\\ 2x-\ y+2z&=0\\ x+\ y+2z&=-1\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x+2y-\ z&=1\\ -x+\ y+\ z&=2\\ x+\ y+2z&=-1\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x+2y+\ 3z&=3\\ -2x\qquad +\ z&=-2\\ x+2y-\ z&=3\\ -x+2y+12z&=1\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=5\\ 2x-\ y-\ z&=1\\ x+3y+4z&=6\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} 2x-2y-4z&=-2\\ -3x+3y+9z&=6\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} 5x-3y+2z&=13\\ 2x-\ y-3z&=1\\ 4x-2y+4z&=12\end{aligned}$$

2. Odredite koeficijente a,b i c tako da parabola $y=ax^2+bx+c$ prolazi točkama $(-2,3),(-1,2)$ i $(1,6)$.

3. Odredite inverz matrice

(a)

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ -2 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

4. Odredite inverz matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

te uz pomoć njega riješite matričnu jednadžbu $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.

5. Odredite rješenje matričnih jednadžbi:
   (a) $AX - B = C$
   (b) $AX + BX = C$
   (c) $AX - X = B$
   (d) $XA = B - XC$
   (e) $A^2 + XA = B$

Rješenja zadataka

1. (a) $(1,0,-1)$
   (b) $(-4/3,1,-1/3$
   (c) $(1,1,0)$
   (d) $(1,-1,2)$
   (e) $(t+1,t,1), \quad t \in \mathbb{R}$
   (f) UPUTA: prije rješavanja zamijenite *I* s *I-III* da dobijete pivotnu jedinicu, $(1,-2,1)$
2. $a = 1, \quad b = 2, \quad c = 3$
3. (a) (b) (c)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 5 & 11 & -2 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -5/2 & 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

4.

$$X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

5. (a) $X = A^{-1}(B - C)$
   (b) $X = (A + B)^{-1}C$
   (c) $X = (A - I)^{-1}B$
   (d) $X = B(A + C)^{-1}$
   (e) $X = (B - A^2)A^{-1}$

5. Primjene matričnog računa

5.1 Determinanta matrice

Definicija 5.1.1 — Determinanta matrice. Svakoj kvadratnoj matrici A reda n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

pridružen je broj $\det A$ koji se zove **determinanta matrice** i zapisuje

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{5.2}$$

Determinanta se definira rekurzivno ovako:

1. $\det(a_{11}) = |a_{11}| = a_{11}$,
2. za matricu A reda $n \geq 2$ je $\det A$ zadana tzv. razvojem po i-tom retku kao

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}, \tag{5.3}$$

> pri čemu je A_{ij} jednak broju $(-1)^{i+j}$ pomnoženom s determinantom matrice koja se od matrice A dobiva ispuštanjem i-tog retka i j-tog stupca. A_{ij} se zove algebarski komplement elementa a_{ij}. Vrijednost determinante ne ovisi o tome po kojem je retku (stupcu) razvijamo.

Pogledajmo što definicija konkretno znači. Za $\underline{n=1}$ je po definiciji $|a_{11}| = a_{11}$.

Za $\underline{n=2}$, razvoj po 1. retku daje

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}(-1)^{1+1}|a_{22}| + a_{21}(-1)^{1+2}|a_{12}| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \tag{5.4}$$

Vidimo da se od umnoška elemenata na glavnoj dijagonali oduzme umnožak elemenata sporedne dijagonale.

Za $\underline{n=3}$ je

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Za praktično računanje determinante matrice reda 3 pogodno je tzv. Sarrusovo pravilo. Izvan zagrade koja zatvara determinantu dopisujemo, bez ikakva matematičkog značenja, već samo kao pomoć, elemente prvih dvaju stupaca matrice te zatim od zbroja umnožaka elemenata u smjeru glavne dijagonale oduzimamo zbroj umnožaka elemenata u smjeru sporedne dijagonale:

$$\begin{array}{|ccc|cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \tag{5.6}$$

Uočite da je dobiveni izraz jednak gornjem, dobivenom po definiciji determinante!

■ **Primjer 5.1** Odredimo determinantu matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Rješenje:

$$\begin{array}{|ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -3 & 3 & 2 \end{array} = \begin{array}{c} 1\cdot(-2)\cdot(-3) + 0\cdot 3\cdot 3 + 2\cdot 1\cdot 2 \\ -2\cdot(-2)\cdot 3 - 1\cdot 3\cdot 2 - 0\cdot 1\cdot(-3) = 16 \end{array}$$

■

Svojstva determinante

1. Determinanta se množi nekim brojem tako da se tim brojem množe svi elementi nekog (**jednog!**) stupca ili retka.
2. Determinanta se ne mijenja ako nekom retku (stupcu) pribrojimo neki drugi redak (stupac).
3. Determinanta je jednaka 0 ako su svi elementi nekog retka (stupca) jednaki 0 ili ako među vektorima-retcima (vektorima-stupcima) matrice ima linearno zavisnih.
4. Pri zamjeni dvaju redaka (stupaca) matrice mijenja se predznak determinante.
5. Za kvadratne matrice A i B reda n je $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.
6. Za kvadratnu matricu A reda n je $\det A^T = \det A$.

Napomenimo da regularnost dane kvadratne matrice možemo ispitati računanjem determinante te matrice i pozivanjem na sljedeći teorem.

Teorem 5.1.1 Kvadratna matrica A reda n je regularna ako i samo ako je $\det A \neq 0$.

Vježba 5.1 Provjerite računanjem determinante je li regularna matrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

nije, $\det A = 0$

Vježba 5.2 Provjerite da je determinanta trokutaste matrice jednaka umnošku elemenata na glavnoj dijagonali.

Determinanta u određivanju inverza matrice - Cramerovo pravilo

Inverz matrice moguće je odrediti tzv. Cramerovim pravilom, preko transponirane matrice algebarskih komplemenata. Neka je zadana regularna matrica A reda n. Tada je

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A_{adj}, \tag{5.7}$$

gdje je A_{adj} adjunkta matrice A, to jest transponirana matrica algebarskih komplemenata matrice A:

$$A_{adj} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

■ **Primjer 5.2** Odredimo uz pomoć Cramerovog pravila inverz matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Rješenje: Algebarski komplementi su redom

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 0,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 12,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 4,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -9,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 4,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2.$$

Po formuli za inverz je

$$A^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 12 & -9 & -1 \\ 8 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 \\ 3/4 & -9/16 & -1/16 \\ 1/2 & -1/8 & -1/8 \end{pmatrix}.$$

■

Cramerovo pravilo u rješavanju sustava linearnih jednadžbi

Rješenje sustava od n linearnih jednadžbi s n nepoznanica čija matrica sustava je regularna može se odrediti uz pomoć determinanti: s D označimo determinantu matrice sustava, a s D_{x_i} determinantu u kojoj je i-ti stupac zamijenjen stupcem slobodnih koeficijenata. Tada je $x_i = \frac{D_{x_i}}{D}$ za $i = 1, \ldots, n$.

■ **Primjer 5.3** Cramerovim pravilom odredimo rješenje sustava:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 5 \\ 2x - \ y - \ z &= 1 \\ x + 3y + 4z &= 6 \end{aligned}$$

Rješenje: Računamo redom četiri determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2,\ \ D_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix} = -2,\ \ D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 4.$$

Sada je

$$x = \frac{D_x}{D} = 1, \quad y = \frac{D_y}{D} = -1, \quad z = \frac{D_z}{D} = 2.$$

■

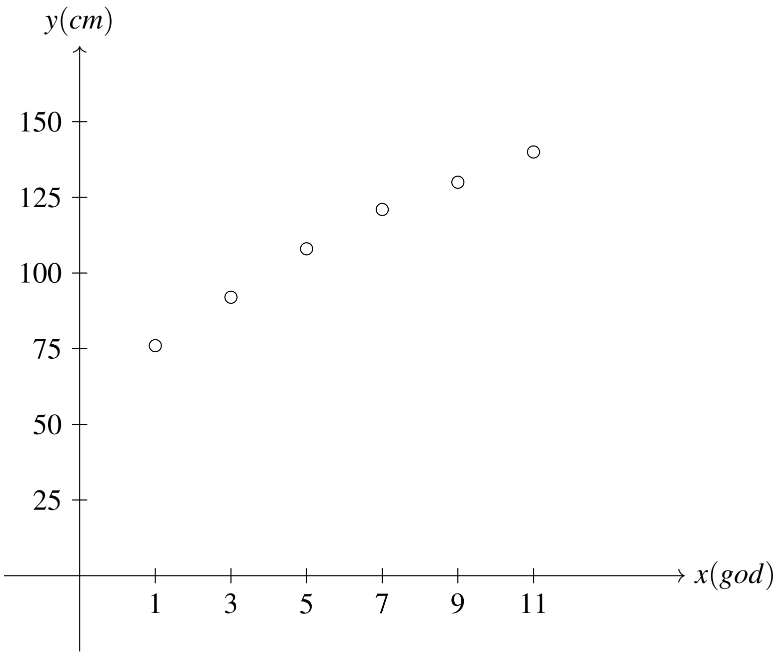
5.2 Regresijski pravac

■ **Primjer 5.4** Mjerenjem visine djece različitih uzrasta dobiveni su sljedeći podatci:

uzrast (god)	1	3	5	7	9	11
visina (cm)	76	92	108	121	130	140

.

Nacrtajmo podatke kao točke koordinatnog sustava.
Rješenje: Uzrast djeteta je nezavisna varijabla. Visinu djeteta smatramo zavisnom varijablom jer ona ovisi o uzrastu djeteta. Dakle, kod crtanja uzrast nanesemo na x-os, a visinu na y-os koordinatnog sustava. Dobiveni graf zovemo dijagram raspršenja.



Slika 5.1: Dijagram raspršenja podataka

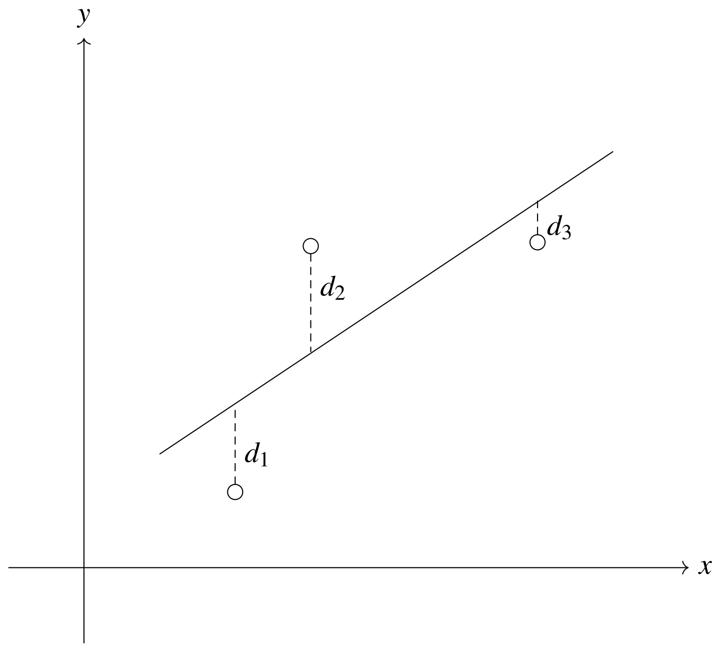
■

Iz smještaja točaka u koordinatnom sustavu primjećujemo linearan trend ovisnosti visine djeteta o njegovom uzrastu. Međutim, prave linearne ovisnosti visine o uzrastu nemamo, odnosno ne postoji pravac koji bi prolazio kroz sve zadane točke. Želimo, stoga, odrediti pravac koji "najbolje" prolazi pokraj svih točaka. Kriterij odabira tog pravca jest metoda najmanjih kvadrata. Želimo odrediti pravac sa svojstvom da je suma kvadrata odstupanja točaka od pravca u smjeru y-osi minimalna moguća.
Za ilustraciju metode najmanjih kvadrata uzmimo da su u koordinatnom sustavu zadane tri točke.

Želimo odrediti pravac za koji vrijedi da je ${d_1}^2 + {d_2}^2 + {d_3}^2$ najmanjeg mogućeg iznosa. Taj pravac nazivamo **regresijski pravac** i kažemo da je on optimalan u smislu metode najmanjih kvadrata. Kad odredimo jednadžbu regresijskog pravca, iz nje izvodimo i zaključke o vrijednostima zavisne varijable i za one vrijednosti nezavisne varijable koje podatci ne obuhvaćaju. U prethodnom primjeru, primjerice, o visini djeteta starog 10 godina.

Nalaženje regresijskog pravca

Neka je dano n vrijednosti nezavisne varijable: $x_1, \ldots, x_n$ i pripadne vrijednosti zavisne varijable: $y_1, \ldots, y_n$. Pretpostavljamo da svaka od n vrijednosti zavisne varijable približno linearno ovisi



Slika 5.2: Ilustracija metode najmanjih kvadrata

o odgovarajućoj vrijednosti nezavisne varijable. Tražimo jednadžbu **regresijskog pravca** koji optimalno (u smislu metode najmanjih kvadrata) opisuje tu linearnu ovisnost. Točnije tražimo nepoznate koeficijente b i a u jednadžbi $\tilde{y} = b + ax$ regresijskog pravca. Imamo n jednadžbi, odnosno elemenata tzv. **modelne funkcije**:

$$y_i = b + ax_i + \varepsilon_i \,,\; i = 1, \ldots, n. \tag{5.9}$$

Tu su: x_i i-to opažanje nezavisne varijable, y_i i-to opažanje zavisne varijable, b nepoznati odsječak regresijskog pravca na y-osi, a nepoznati koeficijent smjera regresijskog pravca, te ε_i slučajna "greška" i-tog opažanja. Iznosi ε_i jesu upravo veličine odstupanja točaka od regresijskog pravca u smjeru y-osi. Svih n jednadžbi modelne funkcije možemo zapisati u obliku matrične jednadžbe

$$y = X\beta + \varepsilon \tag{5.10}$$

pri čemu je

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}. \tag{5.11}$$

Matricu X zovemo **matrica dizajna**. O izgledu elemenata u matrici dizajna odlučujemo prema modelnoj funkciji. U prvom stupcu matrice X stoje jedinice, a u drugom opažene vrijednosti nezavisne varijable. Zašto? U umnošku $X\beta$ retke matrice X množimo sa stupcima matrice β i trebamo dobiti $b + ax_i$, kako stoji u modelnoj funkciji. Zbilja,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}. \tag{5.12}$$

Rješenje β matrične jednadžbe $y = X\beta + \varepsilon$ tražimo prema metodi najmanjih kvadrata. Dakle, tražimo takve b, a da duljina vektora greške,

$$\|\varepsilon\| = \sqrt{{\varepsilon_1}^2 + {\varepsilon_2}^2 + \cdots + {\varepsilon_n}^2} \tag{5.13}$$

bude minimalna moguća. Pokazuje se da vektor β dobivamo rješavanjem **normalne jednadžbe**:

$$(X^T X)\beta = X^T y. \tag{5.14}$$

Čim je matrica X ranga 2, postoji inverz matrice $X^T X$. To je slučaj čim među elementima $x_1, \ldots, x_n$ imamo barem dva različita. Raspišimo $X^T X$ i $X^T y$:

$$X^T X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n {x_i}^2 \end{pmatrix}, \tag{5.15}$$

$$X^T y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{pmatrix}. \tag{5.16}$$

Dakle, da dobijemo koeficijente b, a, rješavamo jednadžbu

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n {x_i}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{pmatrix}. \tag{5.17}$$

Odavde je:

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum (x_i y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, a = \frac{n \sum (x_i y_i) - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}. \tag{5.18}$$

R Upravo opisan postupak nalaženja regresijskog pravca moguće je u potpunosti definirati tek nakon uvođenja pojma funkcije dviju varijabli i znanja određivanja njezinog ekstrema. Kasnije je riješen jedan problem određivanja jednadžbe regresijskog pravca. Ovdje metodu opisujemo bez preciznog objašnjenja budući je tretiramo kao jednu od primjena matričnog računa.

■ **Primjer 5.5** Odredimo regresijski pravac za podatke o visinama djece određenog uzrasta iz prethodnog primjera.

Rješenje: U svrhu određivanja nepoznatih koeficijenata a i b treba izračunati:

$$\sum x_i = 36, \sum y_i = 667, \sum(x_i y_i) = 4449 \text{ i } \sum {x_i}^2 = 286.$$

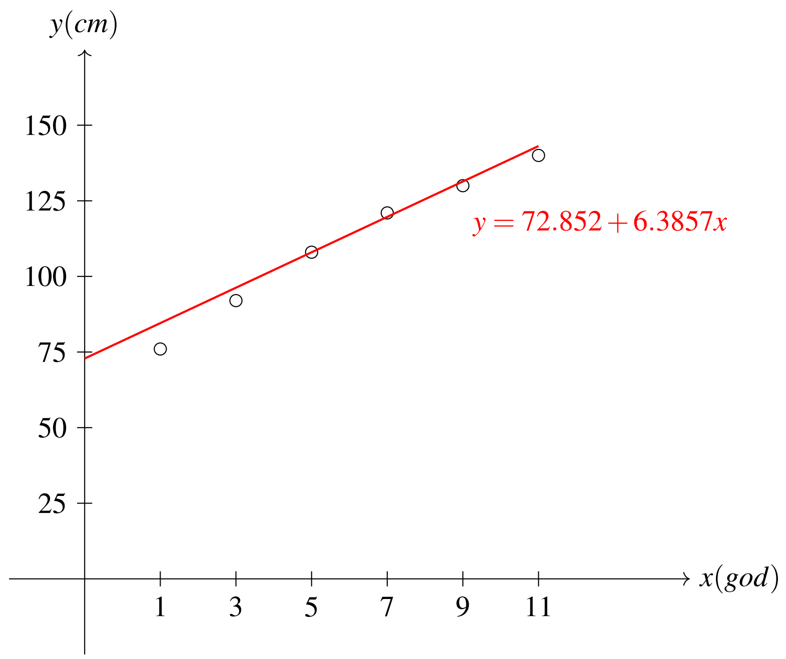
Nepoznati koeficijenti pravca regresije dobivaju se:

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 36 \\ 36 & 286 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 667 \\ 4449 \end{pmatrix} = \frac{1}{6 \cdot 286 - 36^2} \begin{pmatrix} 286 & -36 \\ -36 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 667 \\ 4449 \end{pmatrix}.$$

Stoga je

$$b = \frac{6 \cdot 4449 - 36 \cdot 667}{6 \cdot 286 - 36^2} = 72.852, \; a = \frac{286 \cdot 667 - 36 \cdot 4449}{6 \cdot 286 - 36^2} = 6.3857$$

Jednadžba regresijskog pravca glasi $\tilde{y} = 72.852 + 6.3857x$. Na slici 5.3 je graf tog pravca.



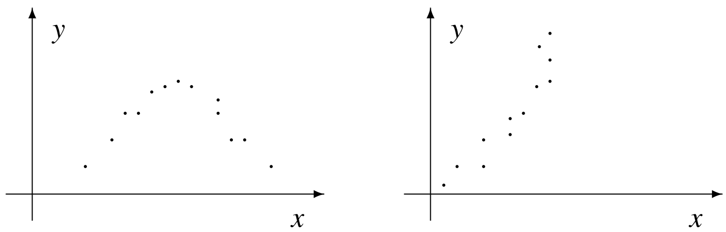
Slika 5.3: Položaj regresijskog pravca

Postavlja se pitanje značenja dobivenih koeficijenata a i b. Koeficijent b je vrijednost zavisne varijable y za $x = 0$, dok je a je fiksna promjena zavisne varijable y pri promjeni nezavisne varijable za 1.

Dani regresijski pravac može se koristiti za procjenjivanje vrijednosti y i za one x koji nisu dani u početnom skupu podataka. Govori se o **interpolaciji** ako se procjenjuju vrijednosti y za x iz raspona danog podatcima te o **ekstrapolaciji** ako se predviđanje vrši za vrijednosti x van danog raspona. Na primjer, iz jednadžbe regresijskog pravca možemo interpolacijom procijeniti visinu 10-godišnjeg djeteta: za $x = 10$ je $\tilde{y} \approx 72.852 + 6.3857 \cdot 10 = 136.709$ cm. No, valja biti oprezan i model ne koristiti za ekstrapolaciju daleko izvan raspona zadanih nezavisnih varijabli. Zašto? Prema modelu novorođeno dijete trebalo bi biti visine 72.852 cm. Nadalje, predvidite uz pomoć pravca regresije visinu 25-ogodišnjeg "djeteta"!

■

R Linearan model nije uvijek odgovarajući. Sam oblik dijagrama raspršenja svojim oblikom sugerira na koju vrstu funkcije treba svoditi podatke. U primjeru na prvoj slici vidimo da dijagram raspršenja sugerira svođenje na na parabolu, a na drugoj na neku od potencija:



Slika 5.4: Mogući oblici dijagrama raspršenja

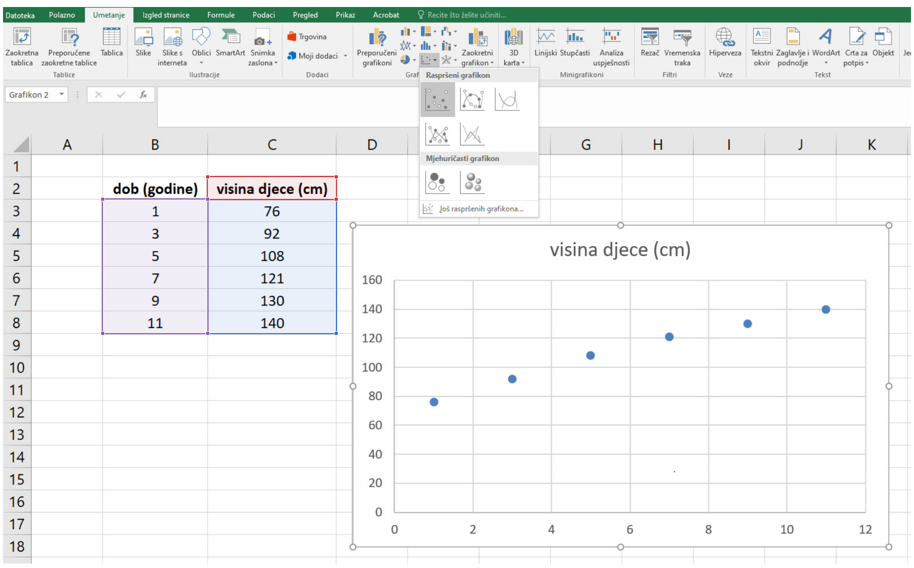
Jednadžbu regresijskog pravca moguće je iz podataka dobiti korištenjem alata Excel kako je opisano u sljedećem rješenju primjera o visinama djece. Verzije programa mogu varirati, ali princip određivanja je isti.

■ **Primjer 5.6 — Određivanje regresijskog pravca u Excelu.** Podatke o visinama djece unesemo u Excel.

uzrast (god)	1	3	5	7	9	11
visina (cm)	76	92	108	121	130	140

.

Potom umetnemo raspršeni dijagram podataka (slika 5.5).

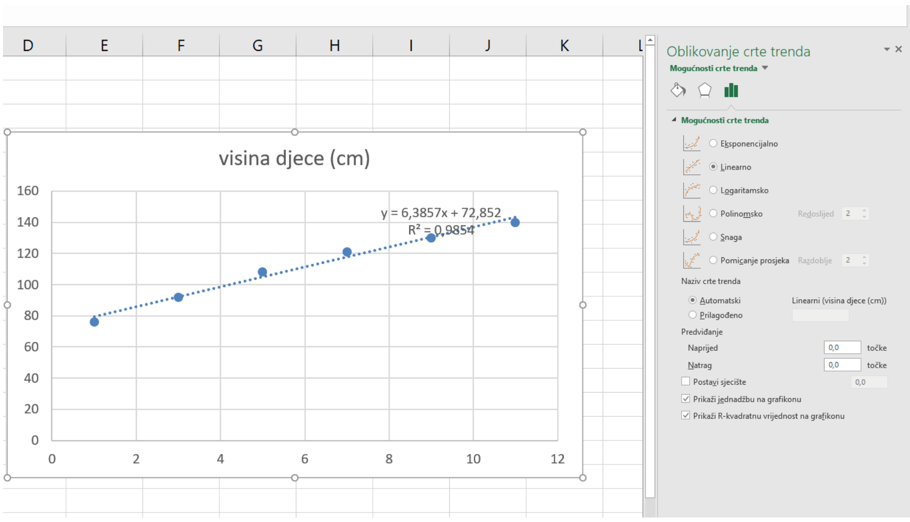


Slika 5.5: Dobivanje dijagrama raspršenja u Excelu

Označavanjem bilo kojeg podatka na dijagramu raspršenja lijevom tipkom miša nudi se opcija "Dodavanje crte trenda" (slika 5.6).

Slika 5.6: Opcija "Dodavanje crte trenda" u Excelu

Odabirom opcije "Dodavanje crte trenda" otvara se novi dijaloški okvir koji nudi odabir modela (ne samo linearnog!) te prikaz jednadžbe i koeficijenta određenosti (kao mjere valjanosti modela). Odaberemo linearan trend (slika 5.7).



Slika 5.7: Odabir trenda u Excelu

Linearna funkcija koja najbolje opisuje podatke je $\tilde{y} = 6.3857x + 72.852$ (slika 5.7). To je predviđena visina djeteta starog x godina. Koeficijent određenosti R^2 je statistička mjera valjanosti modela. On iznosi 0,9854, što znači da je čak 98,54% varijabilnosti zavisne varijable (visine djeteta) opisano danim linearnim modelom.

U jednadžbi pravca koeficijent 6.3857 označuje prosječni godišnji porast visine djeteta (u cm). Koeficijent 72.852 daje visinu djeteta starog 0 godina (novorođenčeta) i nije bitan (niti točan!). Uz pomoć dobivenog modela moguće je vršiti predviđanja (u ćeliji predviđanja visine 10-godišnjaka vidljiva je formula izračuna, slika 5.8). Kao što vidimo na predviđenoj vrijednosti visine "djeteta" starosti 25 godina, daleke ekstrapolacije ne treba raditi jer svaki model ima i svoja ograničenja te nije valjan daleko van intervala originalno zadanih podataka.

dob (godine)	visina djece (cm)
1	76
3	92
5	108
7	121
9	130
11	140
predviđanje	
10	=$C$15*B11+$C$16
4	98,3948
25	232,4945
nagib	6,3857
odsječak	72,852

Slika 5.8: Predviđanje uz pomoć trenda

■

5.3 Analiza ulaza i izlaza

Analiza ulaza i izlaza (*input-output* analiza) je primjer primjene teorije matrica u ekonomiji. Nastala je 1936. godine. Tvorac joj je Wassily Leontief. Model proučava pojednostavljenu ekonomiju neke zemlje koju čini više grana (sektora) te je cilj uspostaviti kvantitativne relacije među tim granama da tijek proizvodnje bude nesmetan. Odnose proizvodnje i potrošnje među granama privrede modeliramo kvadratnom matricom. Ovdje su:

- ulaz (input) - ono što u privrednu granu ulazi (sredstva proizvodnje, rad)
- izlaz (output) - ono što izlazi iz privredne grane (proizvod, usluga).

Opišimo model. Neka je čitavo gospodarstvo podijeljeno na n grana. Označimo izlaz i. grane s X_i. Dio izlaza i. grane može služiti kao ulaz za proizvodnju u nekoj od ostalih grana. Označimo s X_{ij} dio izlaza i. grane koji služi kao ulaz za j. granu proizvodnje. Na kraju, označimo s x_i tzv. finalnu potražnju i. grane, tj. dio izlaza i. grane koji se ne koristi kao ulaz u drugim granama proizvodnje niti se upotrebljava tamo gdje je stvoren. Iz navedenih podataka sastavlja se **tabela ulaza-izlaza (input-output tabela)**

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
X_i & & X_{ij} & & x_i \\
\hline
X_1 & X_{11} & \cdots & X_{1n} & x_1 \\
X_2 & X_{21} & \cdots & X_{2n} & x_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
X_n & X_{n1} & \cdots & X_{nn} & x_n
\end{array}
\tag{5.19}
$$

Iz tabele možemo izdvojiti tri matrice:

$$
X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & \cdots & X_{nn} \end{pmatrix}. \tag{5.20}
$$

Matrica X zove se **matrica proizvodnje** ili **matrica ukupnih izlaza**, matrica D je **matrica finalne potražnje** , a matrica B zove se **matrica ulaza-izlaza** .

Budući je pojedini element matrice proizvodnje X jednak sumi svih elemenata matrice ulaza-izlaza koji su u istom retku i elementa matrice finalne potražnje iz istog retka, imamo:

$$
X_i = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} + x_i. \tag{5.21}
$$

Uvodimo **tehničke koeficijente**

$$
a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j}, \tag{5.22}
$$

koji opisuju udio i. grane u jedinici proizvoda j. grane. Od njih sastavimo **matricu tehničkih koeficijenata**

$$
A = (a_{ij}). \tag{5.23}
$$

Uočimo da je $0 \le X_{ij} \le X_j$, pa je $0 \le a_{ij} \le 1$ za sve i, j. Za svaki $i = 1, \ldots, n$ je

$$
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = X_i - x_i, \tag{5.24}
$$

pa vrijedi $AX = X - D$. Stoga matricu finalne potražnje računamo kao

$$
D = X - AX. \tag{5.25}
$$

Ukoliko imamo zadanu matricu tehničkih koeficijenata A, pojedini se elementi matrice ulaza-izlaza računaju po formuli

$$
X_{ij} = a_{ij} X_j. \tag{5.26}
$$

U praksi (računima) su obično poznate matrice A (ulaza-izlaza) i D (matrica finalne potražnje), a traži se matrica ukupnih izlaza X. Kako je dobiti? Kako je $D = X - AX$, možemo pisati

$D = IX - AX$ za jediničnu matricu I odgovarajućeg reda. Sad izlučimo zajednički faktor, matricu X zdesna (izlučujemo zdesna jer množenje matrica nije komutativno!)

$$D = (I - A) \cdot X. \tag{5.27}$$

Matrica $I - A$ ima posebno ime, zove se **matrica tehnologije** i označava se slovom T. Da dobijemo X, pomnožimo jednakost slijeva s T^{-1}. (To je moguće jedino ako je T regularna što jest slučaj u realnim primjenama.) Izlazi da je

$$X = T^{-1} \cdot D. \tag{5.28}$$

Dakle, matricu ukupnih izlaza dobivamo množenjem inverza matrice tehnologije s matricom finalne potražnje.

■ **Primjer 5.7** Ekonomija neke zemlje podijeljena je u tri grane. Dana je tabela ulaza-izlaza:

X_i	X_{ij}			x_i
100	0	30	0	
60	20	0	20	
80	30	30	0	

Dopunimo tabelu matricom finalne potražnje D, odredimo matricu tehničkih koeficijenata A i matricu tehnologije T.

Rješenje: Elementi matrice D jednaki su razlici elementa matrice proizvodnje i zbroja elemenata matrice ulaza-izlaza iz istog retka. Tako je $x_1 = 100 - 30$, $x_2 = 60 - (20 + 20) = 20$, $x_3 = 80 - (30 + 30) = 20$. Dakle,

$$D = \begin{pmatrix} 70 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Elementi matrice tehničkih koeficijenata jesu $a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j}$. Znači:

$$a_{11} = \frac{X_{11}}{X_1} = \frac{0}{100} = 0, a_{21} = \frac{X_{21}}{X_1} = \frac{20}{100} = 0.2, a_{31} = \frac{X_{31}}{X_1} = \frac{30}{100} = 0.3.$$

Vidimo da elemente prvog stupca matrice tehničkih koeficijenata dobivamo dijeljenjem elemenata prvog stupca matrice ulaza-izlaza elementom prvog retka matrice proizvodnje, ... Dobivamo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.25 \\ 0.3 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrica tehnologije lako se računa iz matrice tehničkih koeficijenata:

$$T = I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.25 \\ 0.3 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0 \\ -0.2 & 1 & -0.25 \\ -0.3 & -0.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

■ **Primjer 5.8** Sastavimo tabelu ulaza-izlaza ako je za gospodarstvo podijeljeno u tri grane zadana matrica tehničkih koeficijenata

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.25 & 0 \\ 0.2 & 0.25 & 0.5 \\ 0.4 & 0.25 & 0.2 \end{pmatrix}$$

i matrica proizvodnje (ukupnih izlaza)

$$X = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 120 \end{pmatrix}.$$

Rješenje: Slučaj je sad obratan nego u prethodnom primjeru. Sada su zadani tehnički koeficijenti a_{ij}. Preko njih i elemenata matrice proizvodnje moramo dobiti elemente matrice ulaza-izlaza. Znamo da je $a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j}$ pa je $X_{ij} = a_{ij}X_j$. Znači

$$X_{11} = a_{11}X_1 = 0.2 \cdot 100 = 20, \quad X_{21} = a_{21}X_1 = 0.2 \cdot 100 = 20, \quad X_{31} = a_{31}X_1 = 40.$$

(Elemente prvog stupca matrice ulaza-izlaza dobivamo množenjem odgovarajućih elemenata matrice tehničkih koeficijenata s X_1). Slično izračunamo i elemente preostalih dvaju stupaca matrice ulaza-izlaza. Elemente matrice finalne potražnje odredimo kao razliku elementa matrice proizvodnje i zbroja svih elemenata matrice ulaza-izlaza navedenih u tom retku. Dobivamo

X_i	X_{ij}			x_i
100	20	50	0	30
200	20	50	60	70
120	40	50	24	6

■

■ **Primjer 5.9** Zadana je tabela ulaza-izlaza neke ekonomije s tri grane

X_i	X_{ij}			x_i
	30	40	10	20
	20	40	0	140
	30	50	60	40

Prvi stupac ćemo lako popuniti: element matrice proizvodnje jednak je sumi svih elemenata u retku, stoga je matrica proizvodnje

$$X = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 180 \end{pmatrix}.$$

Neka se planiraju novi iznosi ukupne proizvodnje grana:

$$X = \begin{pmatrix} 150 \\ 300 \\ 270 \end{pmatrix}.$$

Sastavimo novu tabelu ulaza-izlaza ako se tehnološki uvjeti ne mijenjaju. Ta formulacija znači da matrica tehničkih koeficijenata ostaje ista. Odredimo je iz stare tabele ulaza-izlaza

X_i	X_{ij}			x_i
100	30	40	10	20
200	20	40	0	140
180	30	50	60	40

Znamo da elemente 1. stupca matrice tehničkih koeficijenata dobivamo dijeljenjem elemenata 1. stupca matrice ulaza-izlaza elementom X_1, a slično odredimo i ostale elemente matrice tehničkih koeficijenata. Dobivamo

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.05555 \\ 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0.3 & 0.25 & 0.03333 \end{pmatrix}.$$

Na temelju nove matrice proizvodnje X i upravo dobivene matrice tehničkih koeficijenata A, određujemo novu matricu ulaza-izlaza. Elemente njezinog 1. stupca dobivamo množenjem elemenata 1. stupca matrice tehničkih koeficijenata elementom $X_1 = 150$ nove matrice proizvodnje, i slično dalje. Dobivamo matricu ulaza-izlaza i matricu finalne potražnje. Nova tabela ulaza-izlaza je:

X_i	X_{ij}			x_i
150	45	60	15	30
300	30	60	0	210
270	45	75	90	60

■

■ **Primjer 5.10** Ekonomiju čine tri sektora: poljoprivreda P, energetika E i industrijska proizvodnja I. Proizvodnja poljoprivrednih proizvoda u vrijednosti jednog eura zahtijeva proizvodnju poljoprivrednih proizvoda u iznosu 0.2 eura i energije u iznosu 0.4 eura. Proizvodnja energije u vrijednosti jednog eura zahtijeva proizvodnju energije u iznosu 0.2eura i industrijsku proizvodnju u iznosu 0.4 eura. Industrijska proizvodnja u vrijednosti jednog eura zahtijeva proizvodnju poljoprivrednih proizvoda u iznosu 0.1 eura, energije u iznosu 0.1 eura i industrijsku proizvodnju u iznosu 0.3 eura. Odredite razinu proizvodnje svakog sektora potrebnu za zadovoljavanje potreba poljoprivrede u iznosu od 20 milijardi eura, sektora energetike u iznosu 10 milijardi eura i industrijske proizvodnje u iznosu od 30 milijardi eura.

Rješenje: Na temelju podataka možemo sastaviti matricu tehničkih koeficijenata

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

Zadana je još matrica finalne potražnje $D = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix}$, a nepoznata je matrica proizvodnje X.

Znamo da je $X = T^{-1}D$ za matricu tehnologije $T = I - A$. Imamo

$$T = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & -0.1 \\ -0.4 & 0.8 & -0.1 \\ 0 & -0.4 & 0.7 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.7 & 1.4 & 1.3 \\ 0.4 & 0.8 & 1.6 \end{pmatrix}$$

pa je

$$X = \begin{pmatrix} 1.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.7 & 1.4 & 1.3 \\ 0.4 & 0.8 & 1.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ 37 \\ 64 \end{pmatrix}.$$

Budući da je matrica tehničkih koeficijenata redovito sastavljena od decimalnih brojeva, uputno je prilikom traženja inverza zapisati je u obliku

$$T = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 8 & 0 & -1 \\ -4 & 8 & -1 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

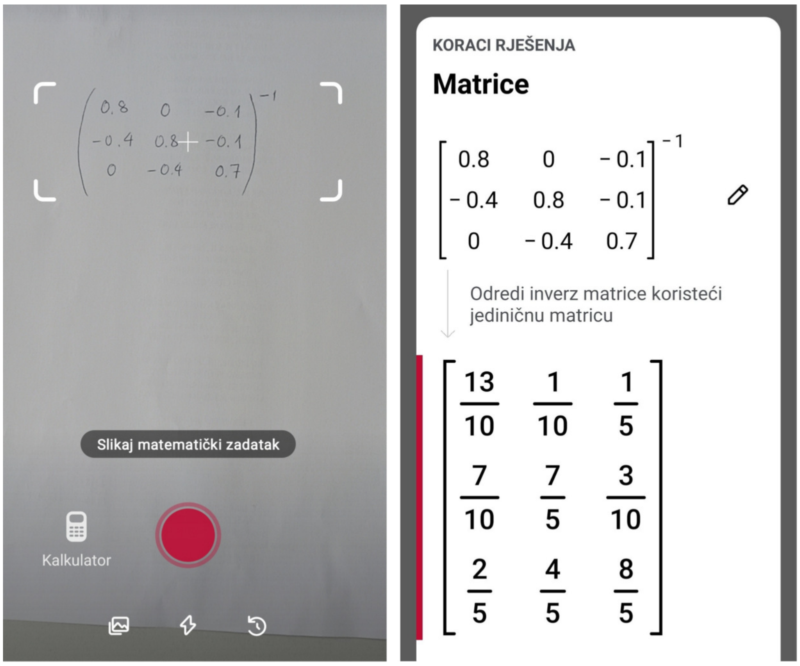
pa je

$$T^{-1} = 10 \begin{pmatrix} 8 & 0 & -1 \\ -4 & 8 & -1 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Inverz matrice moguće je odrediti i korištenjem nekog od dostupnih matematičkih alata. Jedan je od njih WolframAlpha, dostupan na linku.

Još je pogodnija i jednostavnija za uporabu aplikacija *Photomath* koja rješava matematičke zadatke. Postupak je jednostavan: zadatak se fotografira i program daje rješenje, a može prikazati i korake rješavanja.

■



Slika 5.9: Inverz matrice dobiven aplikacijom Photomath

5.4 Zadatci za vježbanje

1. Odredite determinante matrica A, B i $A \cdot B$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Cramerovom metodom odredite inverze matrica

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Na uzorku od osam vozača skupljeni su podatci o vozačkom iskustvu i iznosu polugodišnje premije osiguranja za vozilo:

iskustvo (god)	5	2	12	9	15	6	25	16
premija (eura)	64	87	50	71	44	56	42	60

Odredite jednadžbu pravca regresije i predvidite cijenu premije za vozače s iskustvom od 10 i 30 godina. Koje od predviđanja je pouzdanije?

4. Zadani su podatci o mjesečnom prihodu umirovljenika i izdatku za prehranu (oboje u

desetcima eura):

prihod	35	49	21	39	15	28	25
izdatak	9	15	7	11	5	8	9

Odredite jednadžbu pravca regresije i predvidite koliko će na prehranu trošiti umirovljenik s mirovinom 456 eura. Možemo li uz pomoć modela predvidjeti izdatak za prehranu umirovljenika koji ima mirovinu 1 200 eura?

5. Zadana je matrica tehnologije neke ekonomije s tri grane:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -0.1 & -0.2 \\ -0.3 & 0.8 & -0.4 \\ -0.2 & -0.3 & 0.9 \end{pmatrix}.$$

(a) Odredite matricu A tehničkih koeficijenata.

(b) Ako je matrica proizvodnje

$$X = \begin{pmatrix} 60 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix},$$

sastavite tabelu ulaza-izlaza.

(c) Sastavite tabelu ulaza-izlaza ako znate da je proizvodnja prve grane 100, finalna potražnja druge grane 50 i finalna potražnja treće grane 100.

(d) Odredite matricu proizvodnje za koju je finalna potražnja

$$D = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 80 \end{pmatrix}.$$

6. Ekonomiju čine tri sektora: ugljen, nafta i transport. Proizvodnja jedne jedinice ugljena zahtijeva 0.2 jedinica ugljena i 0.4 jedinice transportnih usluga. Proizvodnja jedinice nafte zahtijeva 0.1 jedinica nafte i 0.2 jedinica transporta. Jedinica transportnih usluga zahtijeva 0.4 jedinice ugljena, 0.2 jedinice nafte i 0.2 jedinice transportnih usluga.

(a) Odredite matricu tehnologije A.

(b) Odredite inverz matrice tehnologije T.

(c) Odredite koja razina proizvodnje zadovoljava sve potrebe ekonomije i finalnu potražnju industrije ugljena od 30 jedinica, naftne industrije od 10 jedinica i transporta od 20 jedinica.

Rješenja zadataka

1. $\det A = -4, \quad \det B = 0, \quad \det(A \cdot B) = 0$

2. (a)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. $\tilde{y} = 76.67 - 1.548x$, 61.19 eura, 30.23 eura, prvo

4. $\tilde{y} = 1.142 + 0.264x$, 131.80 eura, ne

5. (a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$$

(b)

X	X_{ij}			D
60	0	20	40	0
200	18	40	80	62
200	12	60	20	108

(c)

X	X_{ij}			D
100	0	20	40	40
200	30	40	80	50
200	20	60	20	100

(d)

$$X = \begin{pmatrix} 86 \\ 149 \\ 158 \end{pmatrix}$$

6. (a)

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1.7 & 0.2 & 0.9 \\ 0.2 & 1.2 & 0.4 \\ 0.9 & 0.4 & 1.8 \end{pmatrix}$$

(c)

$$X = \begin{pmatrix} 71 \\ 26 \\ 67 \end{pmatrix}$$

II

Drugi dio

6 Elementarne funkcije 75

6.1 Polinomi i racionalne funkcije
6.2 Eksponencijalne funkcije
6.3 Logaritamske funkcije
6.4 Zadatci za vježbanje

7 Domena, limes, operacije s funkcijama 89

7.1 Osnovna svojstva funkcija
7.2 Graf, domena i slika funkcije
7.3 Granična vrijednost (limes) funkcije
7.4 Operacije s funkcijama
7.5 Zadatci za vježbanje

8 Derivacije funkcija 98

8.1 Pojam i značenje derivacije
8.2 Derivacije elementarnih funkcija
8.3 Tehnika određivanja derivacije funkcije
8.4 Derivacije višeg reda
8.5 Zadatci za vježbanje

9 Derivacija - značenje i primjene 106

9.1 Određivanje intervala rasta i pada te lokalnih ekstrema funkcije
9.2 Geometrijsko značenje druge derivacije
9.3 Analiza toka funkcije
9.4 Primjene derivacije funkcije u ekonomiji
9.5 Zadatci za vježbanje

6. Elementarne funkcije

Kažemo da je zadana funkcija $f : \mathscr{D} \to \mathscr{K}$ ako su zadani neprazni skupovi $\mathscr{D}$ i $\mathscr{K}$ i ako znamo kako se svakom $x \in \mathscr{D}$ pridružuje točno jedan $y = f(x) \in \mathscr{K}$. Skup $\mathscr{D}$ je domena, a skup $\mathscr{K}$ kodomena funkcije f. Veličinu x je uobičajeno nazivati argumentom ili nezavisnom varijablom. Varijabla y je zavisna jer njene vrijednosti ovise o vrijednostima varijable x.

Zanimaju nas funkcije koje opisuju ovisnosti kvantitativnih veličina. Stoga ćemo u daljem tekstu smatrati da su $\mathscr{D}$ i $\mathscr{K}$ podskupovi skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Te funkcije zovemo realnim funkcijama realne varijable i njih ćemo proučavati.

Definicija 6.0.1 — Domena, slika i graf funkcije.
Prirodnom domenom funkcije f zovemo maksimalan podskup od $\mathbb{R}$ takav da je vrijednost funkcije na njemu definirana. Prirodnu domenu funkcije f označavamo s $\mathscr{D}(f)$.

Slika funkcije f je skup

$$\mathscr{R}(f) = \{f(x) : x \in \mathscr{D}(f)\} \subseteq \mathbb{R}. \tag{6.1}$$

Graf funkcije f je skup

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathscr{D}(f)\} \subseteq \mathbb{R}^2. \tag{6.2}$$

Funkcije se zorno prikazuju grafovima. Kako je vidljivo iz definicije, graf funkcije f sadrži sve točke ravnine (x,y) za koje je $y = f(x)$.

Definicija 6.0.2 — Monotonost funkcije. Neka je f realna funkcija definirana na nekom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Kažemo da funkcija f **raste** na intervalu I ako za svake dvije vrijednosti $x_1, x_2 \in I$ za koje je $x_1 \leq x_2$, vrijedi i $f(x_1) \leq f(x_2)$. Funkcija f **strogo raste** na intervalu I ako za svake dvije vrijednosti $x_1, x_2 \in I$ za koje je $x_1 < x_2$, vrijedi i $f(x_1) < f(x_2)$. Ako je, za svaka dva $x_1, x_2 \in I$ takva da je $x_1 \leq x_2$, ujedno $f(x_1) \geq f(x_2)$, kažemo da funkcija f **pada** na intervalu I. Funkcija f **strogo pada** na intervalu I ako za $x_1, x_2 \in I$ takve da je $x_1 < x_2$ vrijedi $f(x_1) > f(x_2)$. Funkcija raste (pada) u točki $x_0 \in \mathbb{R}$ ako raste (pada) na nekom intervalu I koji sadrži točku x_0.

6.1 Polinomi i racionalne funkcije

Definicija 6.1.1 — Polinom. Neka su zadani realni brojevi $a_n, \ldots, a_1, a_0$, $a_n \neq 0$. **Polinom n-tog stupnja** P_n u varijabli x je funkcija zadana formulom

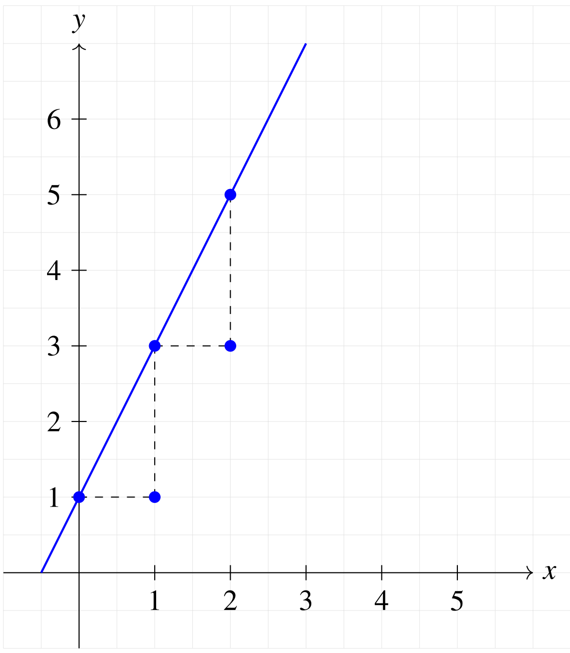
$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0. \tag{6.3}$$

Realne konstante $a_n, \ldots, a_1, a_0$, $a_n \neq 0$ su **koeficijenti** polinoma P_n. Koeficijent a_n zove se **vodeći**, a a_0 **slobodni koeficijent**. **Stupanj polinoma** je najveći eksponent nezavisne varijable x u formuli za P_n. Polinomi su definirani na cijelom $\mathbb{R}$. Najjednostavniji polinom je polinom prvog stupnja (linearna funkcija). Vrijednost polinoma $P(x)$ može se izračunati konačnim brojem operacija zbrajanja i množenja za svaki realan broj x. Zato je svaki polinom definiran na cijelom skupu $\mathbb{R}$. Dijeljenjem polinoma izlazimo iz te klase funkcija, slično kao što dijeljenjem prirodnih (ili cijelih) brojeva dobivamo brojeve koji općenito nisu prirodni (cijeli). Po analogiji s racionalnim brojevima, kvocijente dvaju polinoma nazivamo **racionalnim funkcijama**. Za razliku od polinoma, racionalne funkcije općenito nisu definirane na cijelom skupu $\mathbb{R}$. Njihove vrijednosti ne mogu se izračunati u točkama u kojima im nazivnik poprima vrijednost 0. Naravno, postoje i racionalne funkcije koje su definirane na cijelom $\mathbb{R}$. Polinomi su specijalni slučaj racionalnih funkcija kojima je polinom u nazivniku jednak konstanti.

6.1.1 Linearna funkcija

Vježba 6.1 — Funkcija troškova. U nekom proizvodnom pogonu fiksni trošak dnevne proizvodnje je 1 000 eura, a varijabilni troškovi iznose 250 eura po proizvodu. Kako ukupni dnevni troškovi proizvodnje $T(x)$ ovise o broju proizvoda x? Koliki je ukupni dnevni trošak ako je proizvedeno 250 proizvoda? $T(x) = 250x + 1\,000$, 63 500 eura

Ovisnost troška o broju proizvoda opisuje **linearna funkcija**. Opći oblik linearne funkcije je $f(x) = ax + b$. Na slici je graf funkcije $f(x) = 2x + 1$.



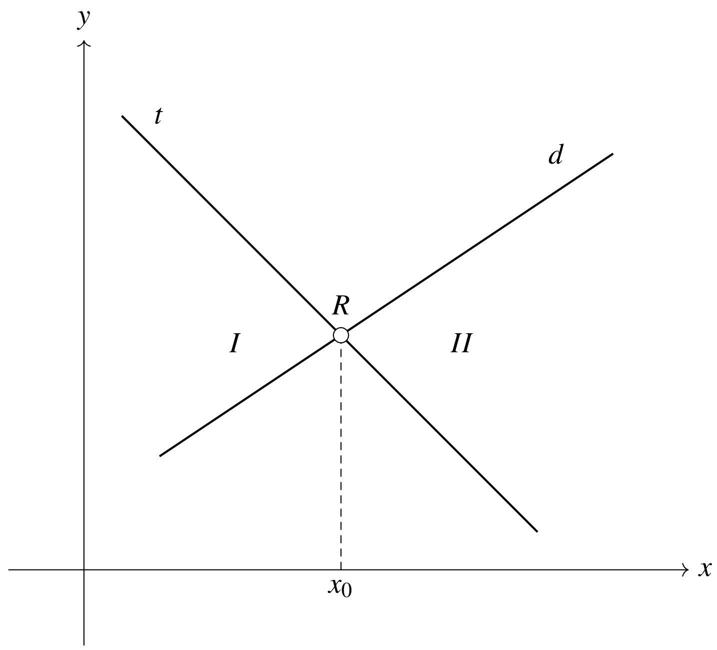
Slika 6.1: Graf linearne funkcije $f(x) = 2x + 1$

Graf linearne funkcije $f(x) = ax + b$ je pravac $y = ax + b$ s koeficijentom smjera a i odsječkom na osi y jednakim b. Linearna funkcija $f(x) = ax + b$ je rastuća ako i samo ako je $a > 0$, a padajuća ako i samo ako je $a < 0$. Za $a = 0$ imamo konstantnu funkciju $f(x) = b$. Kod linearne ovisnosti promjena nezavisne varijable za 1 rezultira promjenom zavisne varijable za a.

Zakon ponude i potražnje

U tržišnoj ekonomiji cijena proizvoda određuje koliku će količinu proizvoda proizvođač biti spreman proizvesti i kupac kupiti. Označimo cijenu proizvoda s x. U opisivanju tržišta uvodimo dvije funkcije: **funkciju ponude**, u oznaci d i **funkciju potražnje**, u oznaci t. Količina proizvoda koju proizvođač nudi (ponuda) ovisi o cijeni proizvoda x. Količina proizvoda koju kupac kupuje (potražnja), također ovisi o cijeni proizvoda x. Stoga funkcije ponude i potražnje razmatramo kao funkcije cijene proizvoda x: $d(x)$ i $t(x)$. Međutim, ovisnosti funkcija ponude i potražnje o cijeni proizvoda se bitno razlikuju. S porastom cijene, funkcija ponude raste. Za razliku od funkcije ponude, funkcija potražnje s porastom cijene pada. Zakon ponude i potražnje kaže da će se u uvjetima tržišnog natjecanja proizvod prodavati po fiksnoj, tzv. **ravnotežnoj cijeni**. Naime, ako je cijena proizvoda visoka, ponuda je velika, a potražnja mala pa se javlja višak robe na tržištu. Proizvođač je stoga prinuđen cijenu spustiti. Ako je, pak, cijena niža od ravnotežne, potražnja je veća od ponude i javlja se manjak robe na tržištu. U tim uvjetima proizvođač može (i hoće) povisiti cijenu proizvoda.

Uzmimo da su funkcije ponude i potražnje linearne funkcije. Grafove tih funkcija crtamo u koordinatnom sustavu u kome je cijena (kao nezavisna varijabla) smještena na osi x, a količina proizvodnje smještena je na osi y. Na slici 6.2, rastući pravac predstavlja graf funkcije ponude d, a padajući pravac graf funkcije potražnje t. Ravnotežna cijena x_0 je apscisa točke R u kojoj se ta dva pravca sijeku. Dio ravnine označen s I je tzv. mjesto manjka proizvoda. Dio ravnine označen s II je tzv. mjesto viška proizvoda.



Slika 6.2: Ilustracija zakona ponude i potražnje

Vježba 6.2 Zadane su linearne funkcije koje daju količinu ponude i potražnje proizvoda u ovisnosti o cijeni proizvoda x u eurima: $d(x) = 2x + 50$ i $t(x) = 200 - x$.

1. Odredimo količinu ponude i potražnje za cijene proizvoda od 30 eura i 60 eura. $d(30) = 110, t(30) = 170; d(60) = 170, t(60) = 140$
2. Odredimo ravnotežnu cijenu proizvoda. $x_0 = 50$ komada

Za određenu količinu proizvodnje x možemo promotriti tri funkcije: **funkciju ukupnog troška** proizvodnje T, **funkciju prihoda** P i **funkciju dobiti** D. Funkciju troška smo već sreli, definirajmo preostale dvije funkcije. Funkcija prihoda P prikazuje prihod proizvodnje. Ukoliko se jedna jednica proizvoda prodaje po cijeni c, prihod od prodaje x jedinica je $P(x) = c \cdot x$. Ukoliko cijena proizvoda ovisi o količini proizvodnje x kao $c(x)$, prihod od prodaje x jedinica je $P(x) = c(x) \cdot x$. Funkcija dobiti D definira se kao razlika funkcije prihoda i funkcije ukupnih troškova: $D = P - T$. Količinu proizvodnje x_0 za koju je $D(x_0) = 0$ zovemo **mjestom izjednačenja** (troškova i prihoda!).

■ **Primjer 6.1** Proizvođač satova ima fiksan dnevni trošak proizvodnje od 10 000 eura te još 150 eura po svakom satu koji proizvede. Ako jedan sat prodaje po cijeni od 250 eura, koliko satova treba dnevno proizvesti da bi mu proizvodnja pokrila troškove?

Rješenje: Funkcije ukupnih troškova T i prihoda P u ovisnosti o broju x dnevno proizvedenih satova glase:

$$T(x) = 150x + 10\,000, \; P(x) = 250x.$$

Odredimo količinu proizvodnje x_0 za koju su ta dva iznosa jednaka. Rješavamo jednadžbu

$$150x_0 + 10\,000 = 250x_0.$$

Rješenje je $x_0 = 100$. Dakle, svaka proizvodnja manja od 100 satova dnevno ne pokriva trošak procesa proizvodnje. Naprotiv, svaka proizvodnja veća od 100 satova dnevno donosi dobit.

■

■ **Primjer 6.2** Trgovina dostavu namještaja naplaćuje fiksnim iznosom od 30 eura plus 2.5 eura po kilometru za udaljenosti koje su veće od 20 km od trgovine. Sastavite funkciju koja opisuje trošak dostave. Odredite koliki je trošak dostave za kupce koji žive 6, 18 i 28 km od trgovine?

Rješenje: Nezavisna je varijabla x udaljenost od trgovine izražena u km. Trošak dostave izražen u eurima je zavisna varijabla, označit ćemo ga s $T(x)$. On je primjer funkcije linearne po dijelovima jer je za $x \leq 20$ fiksan i iznosi 30 eura, a za $x > 20$ se sa svakim km iznad 20 km povećava za 2.5 eura. Zapisujemo

$$T(x) = \begin{cases} 30 & , \quad x \leq 20 \\ 30 + 2.5(x - 20) & , \quad x > 20 \end{cases}$$

Troškovi dostave za navedene kupce su redom 30 eura, 30 eura i 50 eura.

■

6.1.2 Potencije

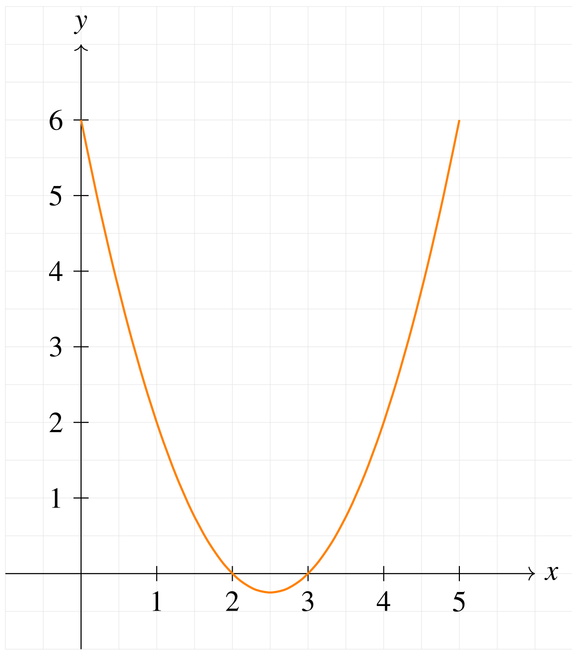
U nastavku definiramo funkcije $f(x) = x^a$ za eksponente a koji su redom prirodni, cijeli i racionalni brojevi i analiziramo izgled njihovih grafova.

1. Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka je zadana funkcija $f(x) = x^n$. Područje definicije takve funkcije je cijeli skup $\mathbb{R}$. Područje vrijednosti funkcije je skup svih realnih brojeva za neparne n, a skup nenegativnih realnih brojeva za parne n.

2. Ako je eksponent potencije negativan cijeli broj, znamo da je $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Izraz ne možemo izračunati kad je $x = 0$. Dakle, područje definicije funkcije $f(x) = x^{-n}$ je skup $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ponovno, područje vrijednosti i oblik grafa ovise o parnosti eksponenta n.
3. Za razlomljene eksponente oblika $a = \frac{m}{n}$, pri čemu je $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, je $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$. Za parne n takve su funkcije definirane samo za nenegativne vrijednosti nezavisne varijable x; za neparne n, definirane su na cijelom $\mathbb{R}$.

6.1.3 Kvadratna funkcija

Polinom drugog stupnja ili kvadratna funkcija zadan je kao $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Graf kvadratne funkcije je krivulja koja se zove **parabola**. Parabole se skiciraju pomoću tri karakteristične točke: nultočaka i tjemena te na osnovi predznaka koeficijenta a. Parabola je otvorena prema gore ako je $a > 0$, a prema dolje ako je $a < 0$. Nultočke parabole su vrijednosti x za koje je $f(x) = 0$, a zadane su izrazom $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Tjeme parabole ima koordinate $(-b/2a, -D/4a)$. Ovdje je D diskriminanta kvadratne funkcije $D = b^2 - 4ac$, njezin predznak određuje broj nultočki. Na slici je graf kvadratne funkcije $f(x) = x^2 - 5x + 6$.



Slika 6.3: Graf kvadratne funkcije $f(x) = x^2 - 5x + 6$

6.1.4 Racionalne funkcije

Definicija 6.1.2 — Racionalna funkcija. Funkcija f je **racionalna** ako je oblika $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, pri čemu su P_n i Q_m polinomi stupnjeva n, odnosno m.

Racionalna funkcija $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ je definirana za sve realne brojeve osim za one za koje je nazivnik jednak 0. Dakle, $\mathscr{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} : Q_m(x) \neq 0\}$. Nultočke racionalne funkcije su nultočke njenog brojnika: $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0$ ako i samo ako je $P_n(x) = 0$.

■ **Primjer 6.3 — Funkcija cijene i koristi.** Cijena (u desetcima tisuća eura) uklanjanja x postotaka zagađenja iz zraka dana je funkcijom $Z(x) = \frac{18x}{106-x}$. Izračunajmo koliko košta smanjenje zagađenja za 50% te koliko zagađenja možemo ukloniti raspolažemo li proračunom od 500 000 eura.

Rješenje: Cijena smanjenja zagađenja za 50% je $10000 \cdot Z(50) = 160714.29$ eura. Glavnina zagađenja može se otkloniti za razumnu cijenu, no potpuno uklanjanje zagađenja je vrlo skupo. Raspolažemo li proračunom od 500000 eura, problem svodi na rješavanje jednadžbe

$$10000Z(x) = 500000.$$

Rješenje jednadžbe je $x = 77.94$ pa se, raspolažemo li proračunom od 500 000 eura, može ukloniti 77.94% zagađenja.

■

■ **Primjer 6.4** Funkcija izmjene proizvoda daje odnos između količina dvaju proizvoda koje mogu biti proizvedene u istom proizvodnom ciklusu ako se proizvodnje međusobno isključuju. Promatramo primjer vinarije koja u boce toči crno i bijelo vino. Ovisnost količine y (u litrama) crnog vina o količini x (u litrama) bijelog vina dana je funkcijom

$$y(x) = \frac{100000 - 50x}{100 + x}.$$

Odredimo koje su maksimalne količine pojedine vrste vina koje mogu biti utočene u boce.

Rješenje: Imamo

1. $f(0) = 1000$ litara ako točimo samo crno vino;
2. $f(x) = 0 \Longrightarrow x = 2000$ ako točimo samo bijelo vino.

■

6.2 Eksponencijalne funkcije

Eksponencijalne se funkcije prirodno javljaju kao matematički modeli situacija u kojima je brzina promjene neke veličine proporcionalna toj veličini. Primjeri su rast populacije, prirast biomase, razmnožavanje bakterija, raspadanje radioaktivnih tvari, itd.

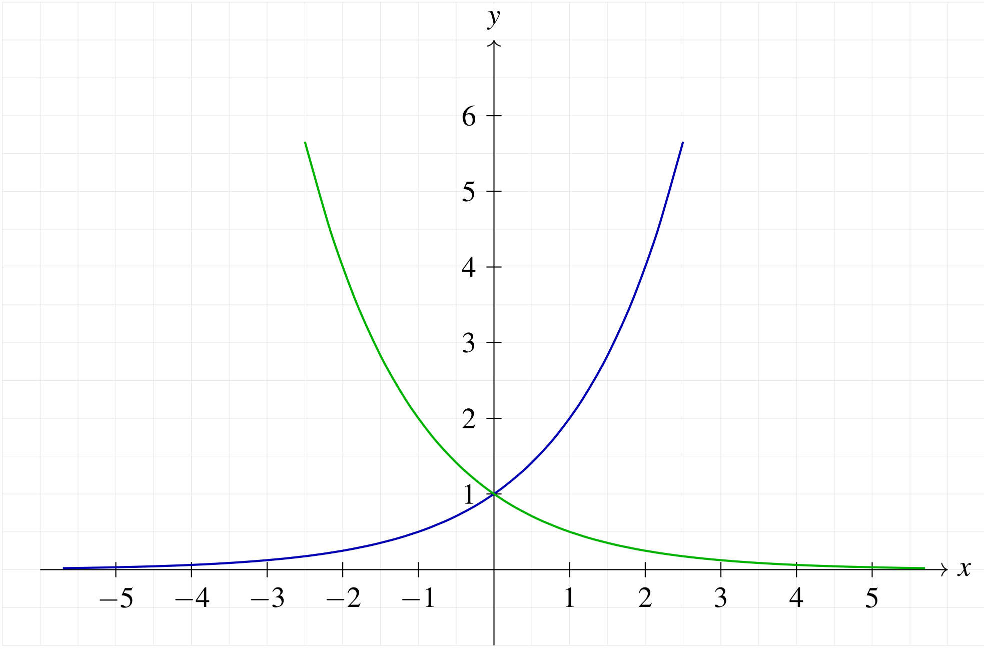
Definicija 6.2.1 — Eksponencijalna funkcija. **Eksponencijalna funkcija** s bazom a ($a > 0, \quad a \neq 1$) je funkcija definirana formulom $f(x) = a^x, x \in \mathbb{R}$.

Nezavisna varijabla se nalazi u eksponentu, odatle ime funkcije. Od svih mogućih baza eksponencijalnih funkcija jedna se izdvaja. To je baza koju označavamo slovom e, $e \approx 2.718281828$. Vrijednosti eksponencijalne funkcije mogu se izračunati za sve realne brojeve, dakle, domena eksponencijalne funkcije je čitav $\mathbb{R}$. Vrijednosti eksponencijalne funkcije su strogo pozitivne, to znači da je slika eksponencijalne funkcije skup $\mathbb{R}^+ = \langle 0, +\infty \rangle$.

Na slici 6.4 su skicirani grafovi funkcija $f(x) = 2^x$ (rastući) i $f(x) = (1/2)^x$ (padajući graf):
Sa slika možemo vidjeti da je x-os horizontalna asimptota grafova funkcija. Grafovi ovih eksponencijalnih funkcija prolaze kroz točku $(0, 1)$, jer je $a^0 = 1$ za svaki pozitivan broj a.

Osnovna svojstva eksponencijalnih izraza

1. $a^x = a^y \Longrightarrow x = y$,
2. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$,
3. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$,
4. $(a^x)^y = a^{xy}$,
5. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$,
6. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.



Slika 6.4: Grafovi eksponencijalnih funkcija $f(x) = 2^x$ i $(1/2)^x$

Vježba 6.3 Glavnica C položena je na štednju uz 10% godišnje kamate. Koliki je iznos na računu nakon n godina? Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan? $C(n) = C1.1^n$

■ **Primjer 6.5 — Neograničeni eksponencijalni rast.** Broj jedinki neke vrste na nekom području se, pod povoljnim uvjetima, udvostručuje svake godine. Nakon t povoljnih godina od uvođenja vrste u to područje, brojno stanje populacije je $B(t) = 6 \cdot 2^t$. Odredimo početni broj jedinki i njihov broj nakon četiri godine.

Rješenje: Početni broj jedinki je $B(0) = 6 \cdot 2^0 = 6$ jedinki.
Iz tablice je vidljiv brzi porast broja jedinki.

t	1	2	3	4	5
$B(t)$	12	24	48	96	192

Nakon četiri godine po naseljavanju njihov je broj $B(4) = 96$ jedinki.

■

■ **Primjer 6.6 — Ograničeni eksponencijalni rast.** Prodaja svakog novog proizvoda u pravilu u početku brzo raste, a zatim se tržište polako zasićuje. Na primjer, uzmimo da broj prodanih primjeraka novog tipa motocikla je opisan funkcijom

$$P(x) = 100(1 - 3^{-x}),$$

pri čemu x označava broj mjeseci proteklih od pojave na tržištu. Izračunajmo početnu te količine prodanih motocikla nakon prvog i drugog mjeseca.

Rješenje:

$$P(0) = 100(1 - 3^0) = 0, \quad P(1) = 100\left(1 - \frac{1}{9}\right) = 67, \quad P(2) = 100\left(1 - \frac{1}{27}\right) = 89.$$

(*Ovdje su vrijednosti zaokružene na najbliži cijeli broj.*)

Ova funkcija prodaje primjer je funkcije ograničenog rasta. Pri računanju $P(x)$ od broja 100 oduzimaju sve manji i manji iznosi pa zaključujemo da graf funkcije $P(x)$ ima za horizontalnu asimptotu pravac $y = 100$.

■

Funkcije koje opisuju radioaktivni raspad također su eksponencijalnog izgleda.

■ **Primjer 6.7** Izotop ugljika C^{14} je zastupljen u određenoj količini u svim živim bićima. Nakon prestanka izmjene tvari s okolinom, tj. nakon smrti organizma, radioaktivni C^{14} se više ne obnavlja i zatečena količina se raspada. Količina izotopa preostala nakon t godina je zadana formulom

$$C(t) = C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}.$$

Ovdje je C_0 količina izotopa C^{14} u živoj tvari. Odredimo koliko je stara kost u kojoj ima 4 puta manje ugljika C^{14} nego u živoj kosti.

Rješenje: Rečeno je

$$C(t) = \frac{C_0}{4},$$

znači da je

$$\frac{C_0}{4} = C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} \quad \to \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

Odavde je $t/5730 = 2$, odnosno $t = 11\,460$ godina.

■

6.3 Logaritamske funkcije

Definicija 6.3.1 — Logaritam. Neka je $a > 0$, $a \neq 1$. **Logaritam** pozitivnog realnog broja x po bazi a je broj c kojim treba potencirati bazu a da bi se dobio broj x. Znači

$$c = \log_a x \Longleftrightarrow a^c = x. \tag{6.4}$$

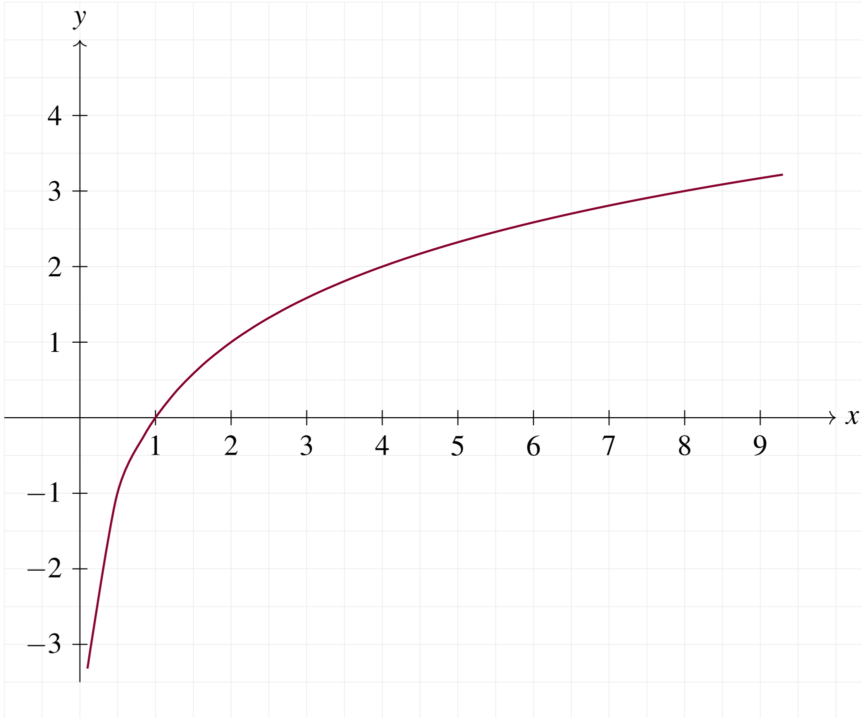
Vježba 6.4 Odredite $\log_2 8$, $\log 100000$, $\log_3 1/81$, $\log_{1/4} 16$, $\ln e^7$. redom $3, 5, -4, -2, 7$

Definicija 6.3.2 — Logaritamska funkcija. **Logaritamska funkcija** s bazom a je funkcija definirana formulom $f(x) = \log_a x$, $x > 0$.

Logaritam broja $x > 0$ po bazi e zovemo **prirodnim** i označavamo s $\ln x$. U primjenama su najčešći logaritmi s bazom 10. Takve logaritme zovemo dekadskima i označavamo s $\log x$, tj. ne pišemo bazu 10. Iz definicije vidimo da logaritme možemo računati samo za pozitivne realne brojeve.

Na slici 6.5 je prikazan graf funkcije $f(x) = \log_2 x$.
Taj je graf ilustrativan primjer grafa svake logaritamske funkcije s bazom većom od jedan. Sve takve funkcije imaju sljedeća svojstva:

- rastuće su; graf im prolazi kroz točku $(1,0)$;
- domena im je skup $\mathbb{R}^+ =< 0, \infty >$; slika im je cijeli $\mathbb{R}$
- vrijednosti funkcije teže u $-\infty$ kada vrijednosti argumenta teže u nulu, tj. y-os je vertikalna asimptota grafa.



Slika 6.5: Graf logaritamske funkcije $f(x) = \log_2(x)$

Osnovna svojstva logaritama: neka su x, y pozitivni realni brojevi, $r \in \mathbb{R}$.

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$,
2. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$,
3. $\log_a x^r = r \log_a x$,
4. $\log_a a = 1; \log_a 1 = 0$,
5. $\log_a a^y = y; a^{\log_a x} = x$,
6. $\log_{1/a} x = -\log_a x$

Logaritamske funkcije s bazom $0 < a < 1$ su padajuće i vrijednosti im teže u $+\infty$ kada vrijednosti argumenta teže u 0. Ostala svojstva ista su im kao i logaritamskim funkcijama s bazom većom od 1. Vrijednosti logaritma istog broja x po dvjema različitim bazama povezane su sljedećom formulom:

$$\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x. \tag{6.5}$$

Vidimo da su vrijednosti logaritama proporcionalne. Konstantu proporcionalnosti $M = \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ zovemo modulom prijelaza. Zahvaljujući gornjoj relaciji, dovoljno je poznavati vrijednosti logaritamske funkcije za jednu bazu; za sve ostale baze koristimo se odgovarajućim modulima prijelaza.

Najčešće korištene baze su 10 (dekadski ili Briggsovi logaritmi), e (prirodni ili Napierovi logaritmi) i 2 (binarni logaritmi). Vrijednosti dekadskih logaritama nekad su bile dane u tzv. logaritamskim tablicama. S porastom dostupnosti elektroničkih računala, važnost logaritamskih tablica kao pomagala pri računanju gotovo je nestala, no logaritamska funkcija je i dalje bitna za opis i razumijevanje mnogih prirodnih pojava.

Vježba 6.5 Riješite jednadžbe:

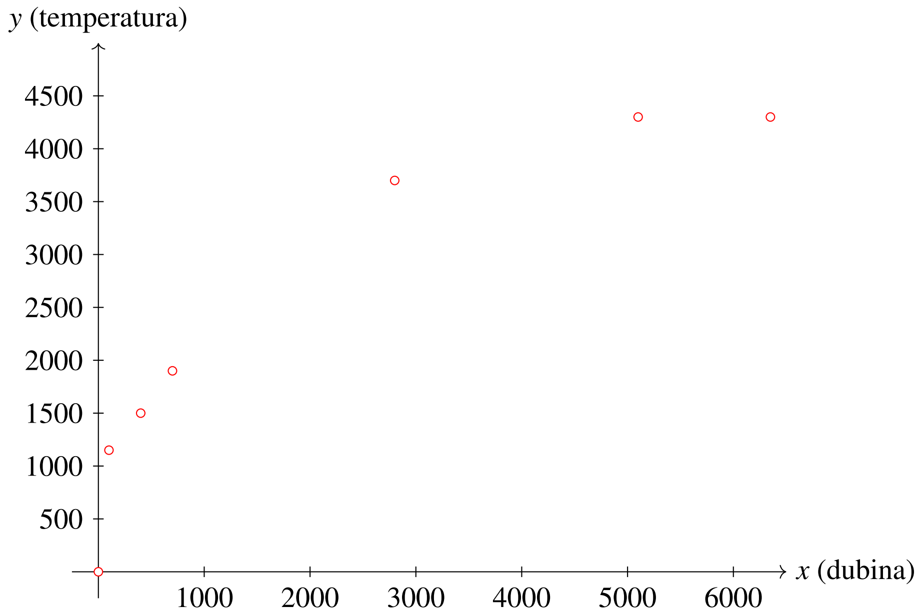
1. $2^{x+3} = 7$ $x = \log_2 7 - 3$
2. $\log_3(x+3) = 2$ $x = 6$

■ **Primjer 6.8 — Modeliranje.** Temperature Zemljine kore na različitim dubinama dobivene geofizičkim mjerenjima prikazane su u tablici:

dubina (km)	temperatura (°C)
0	10
100	1150
400	1500
700	1900
2 800	3700
5 100	4300
6 360	4300

Nacrtajmo graf funkcije i odredimo temperaturu na dubini od 2 000 i 3 000 metara.

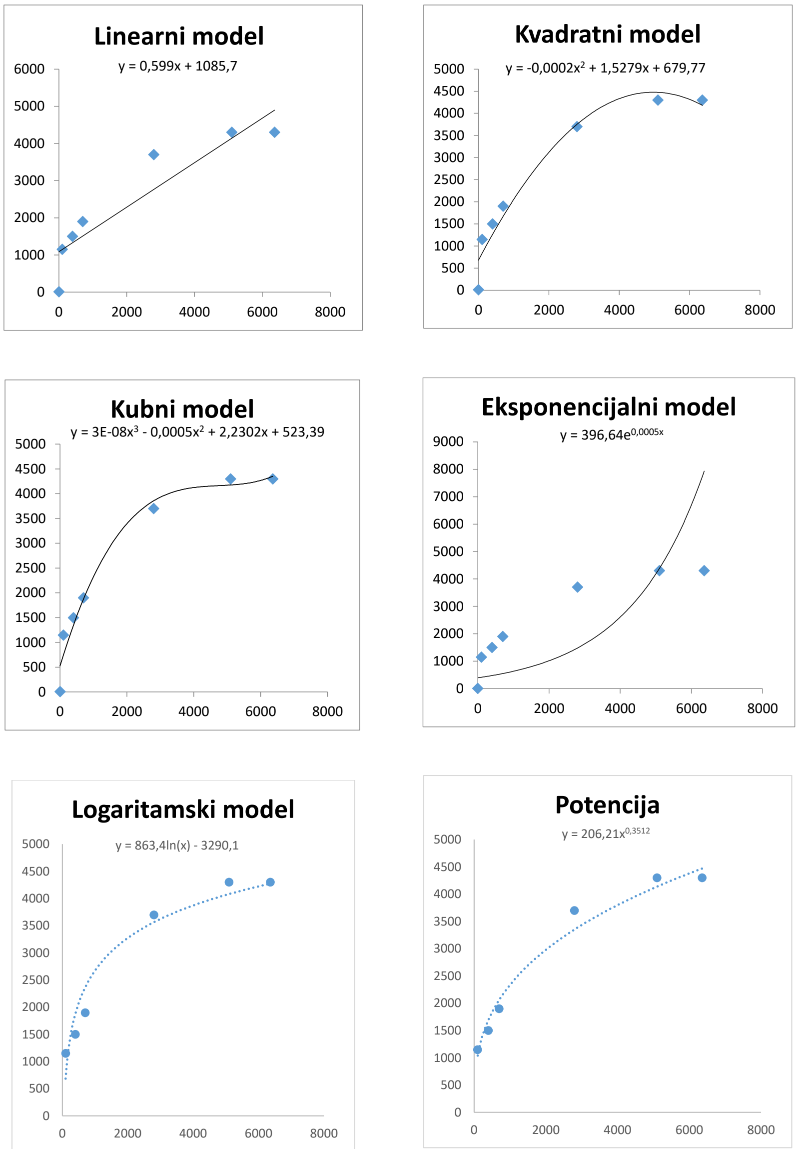
Rješenje:



Slika 6.6: Dijagram raspršenja podataka

Pretpostavljamo da su točke pojedinačnih mjerenja spojene nekom glatkom krivuljom. Možemo je skicirati i procijeniti da bi temperatura na dubini 1 000 km bila oko 2 000°C, a na dubini 3 000 km oko 3 800°C.
Ako točke prikažemo dijagramom raspršenja u programu Excel, postoji mogućnost pronalaženja modelne funkcije za podatke. Alat nudi modele linearne funkcije te polinoma višeg stupnja, potencije, eksponencijalne ili logaritamske funkcije. Kako bismo odabrali odgovarajući model, treba poznavati ponašanje elementarnih funkcija.

Primjerice, za navedene podatke linearni model nije dobar jer on predviđa stalno povećanje temperature s povećanjem dubine dok je u podatcima vidljiv brz porast temperature na malim dubinama s usporavanjem rasta na većim te ustaljivanjem temperature na konstantnoj vrijednosti u zadnjih 1000 km.
Nadalje, za podatke nije moguć model logaritamske funkcije što može začuditi svakoga tko ne pozna osnovna svojstva logaritamske funkcije (ne postoji logaritam broja 0, pa je podatak $(0, 10)$ pri traženju logaritamskog modela najbolje ukloniti iz početnog skupa podataka - slično je i kod modela potencija).
Od svih mogućih modela, princip odabira jest uzeti najjednostavniji mogući koji je dovoljno valjan. U ovom slučaju to je kvadratni model. Ipak, prilikom odabira modela valja biti svjestan i ograničenja njegove primjene. Tako kvadratni model nije pogodan za predviđanje temperatura Zemljine kore na malim dubinama.



Slika 6.7: Ostali funkcijski modeli u Excelu

Po odabiru odgovarajućeg modela, valja poznavati mogućnosti predviđanja modelom. U ovom primjeru interpolacija bi bila predviđanje vrijednosti temperature u unutrašnjosti Zemlje za dubine 0 do 6 360 km, a ekstrapolacija nema smisla jer je radijus Zemlje neznatno veći od najvećeg podatka. Kod interpolacije, neki su modeli bolji za vrijednosti s početka raspona, drugi za vrijednosti s kraja. Kod ekstrapolacija treba biti oprezan i predviđanja ne vršiti za vrijednosti daleko van raspona podataka jer za njih model ne mora biti pouzdan.

■

6.4 Zadatci za vježbanje

1. Zadana je funkcija ukupnih troškova u tisućama eura neke tvrtke u ovisnosti o količini proizvodnje q: $T(q) = 2q + 3$. Koliki su fiksni troškovi proizvodnje? Koje je ekonomsko značenje koeficijenta 2 u funkciji ukupnih troškova $T(q)$?

2. Poduzeće proizvodi televizore uz 5100 eura fiksnih (mjesečnih) troškova i 140 eura varijabilnih troškova po jedinici proizvoda.
   a) Odredite funkciju ukupnih troškova proizvodnje $T(x)$ u ovisnosti o broju proizvedenih televizora x. b) Ako se televizori prodaju po cijeni 200 eura po komadu, izračunajte koliko komada televizora mora poduzeće prodati da bi pokrilo troškove proizvodnje.

3. Vlasnik tiskare ima mjesečne troškove rada 8000 eura koji se uvećavaju za 3 eura za svaki tiskani primjerak tjednika. Ako se tjednik prodaje po cijeni od 5 eura, odredimo mjesto izjednačenja troškova i prihoda. Kolika mora biti naklada da bi tiskara ostvarila mjesečnu dobit od 15000 eura?

4. Zadane su funkcije ponude i potražnje u ovisnosti o cijeni x (u eurima) proizvoda:

   $$d(x) = x + 4, t(x) = \frac{5}{x}.$$

   Odredite ravnotežnu cijenu x_0.

5. Zadane su funkcije ponude i potražnje u ovisnosti o cijeni proizvoda x:

   $$d(x) = 6x + 3,\ t(x) = 19 - 2x.$$

   (a) Nacrtajte grafove funkcija ponude i potražnje u koordinatnom sustavu, označite područja manjka i viška na tržištu i mjesto gdje je ponuda jednaka potražnji.
   (b) Odredite ravnotežnu cijenu i ravnotežnu količinu proizvoda.

6. Zadane su funkcije ponude i potražnje nekog proizvoda u ovisnosti o cijeni x (u stotinama eura): $d(x) = x^2 + x + 1, t(x) = 9 - x$. Odredite ravnotežnu cijenu proizvoda.

7. Zadana je funkcija troška u eura proizvodnje x tona šećerne repe $T(x) = 3x^2 - 20x + 90$.
   (a) Koliki je fiksni trošak proizvodnje?
   (b) Koliki je trošak proizvodnje 10 tona šećerne repe?
   (c) Ako se šećerna repa prodaje po cijeni od 200 eura po toni, odredite funkcije prihoda i dobiti proizvodnje.

8. Trgovac može 300 majica kratkih rukava prodati po cijeni od 6 eura po komadu. Povisi li cijenu za 1 euro, broj prodanih majica smanji se za 30 komada. Odredite po kojoj cijeni treba trgovac prodavati majice da bi mu prihod bio maksimalan?

9. Skicirajte u prvom kvadrantu dio grafa funkcije

   $$y = \frac{125000 - 25x}{125 + x}$$

koja opisuje ovisnost količine (u L) dnevne proizvodnje lož-ulja y o proizvodnji benzina x u jednoj rafineriji. Kolika maksimalna količina pojedinog derivata može biti proizvedena u jednom danu?

10. Prilikom truljenja komposta povećava se temperatura u kompostištu tako da t mjeseci nakon odlaganja ona iznosi

$$T(t) = 12 + \frac{30t}{t^2+1} \; (^\circ C).$$

Odredimo kolika je temperatura u kompostištu prilikom odlaganja biootpada, a kolika mjesec dana kasnije. Kada će temperatura premašiti 24°C?

11. Kapacitet trajekta za prijevoz automobila je 100 mjesta. Cijena karte za prijevoz je 50 eura. Sa svakim slobodnim mjestom prijevoznik ima pravo na subvenciju od 1 eura. Koji broj slobodnih mjesta donosi prijevozniku maksimalnu zaradu? Kolika je maksimalna zarada?

12. Funkcija prihoda proizvodnje x komada nekog proizvoda je $P(x) = -x^2 + 60x - 400$. Koja količina proizvodnje rezultira maksimalnim prihodom? Koliki je maksimalni prihod?

13. Funkcija $f(x) = e^{-0.2x}$ opisuje postotak tostera koji su u ispravnom stanju nakon x godina. Koliki postotak tostera je ispravan nakon godinu dana?

14. a) Skicirajte graf funkcije $f(x) = \log_3 x$.
    b) Riješite jednadžbu $e^{\frac{x+2}{3}} = 1$.

15. Predviđa se da će brojnost (u milijunima stanovnika) populacije neke zemlje nakon isteka t godina od sada biti $B(t) = 50e^{0.02t}$.
    (a) Kolika je trenutna brojnost populacije te zemlje?
    (b) Kolika će biti brojnost populacije za 30 godina?

16. Neka je količina ostatka radioaktivne tvari t godina nakon početka raspadanja zadana formulom $C(t) = 1000 \cdot e^{-0.1t}$. Odredimo vrijeme poluraspada te tvari.

17. Richterova ljestvica služi za izražavanje i uspoređivanje jačina potresa. Potresu jačine I pridružuje se na Richterovoj ljestvici broj $j(I) = \log \frac{I}{I_0}$, gdje je I_0 fiksna jačina vrlo slabog potresa kojeg još registriraju instrumenti.
    (a) Kolike su na Richterovoj ljestvici jačine potresa $1\,000 I_0$, $1\,000\,000 I_0$ i $100\,000\,000 I_0$.
    (b) Koliko puta je potres jačine 6.3 po Richteru jači od potresa jačine 5.3?

18. Broj bakterija u nekoj kulturi opada po formuli $B(t) = 250000e^{-0.4t}$, gdje je t vrijeme izraženo u satima.
    (a) Koliki je početni broj bakterija?
    (b) Koliko će bakterija biti u kulturi nakon jednog sata?
    (c) Nakon koliko sati će u kulturi ostati još samo 25 000 bakterija?

19. Odredite vrijeme poluraspada radioaktivne supstance ako je količina supstance nakon t dana od početka raspadanja zadana s $R(t) = 2350e^{-0.08t}$.

20. Glasnoća zvuka mjeri se jedinicom decibel (dB). Intenzitet I_0 pripisuje se jedva čujnom zvuku. Ako zvuk ima intenzitet I, glasnoća se računa po formuli

$$G(I) = 10 \log \frac{I}{I_0}.$$

Odredite glasnoću (u dB) zvuka čiji je intenzitet:
    (a) $100 I_0$ (šapat),
    (b) $10\,000\,000 I_0$ (vrlo prometna ulica).

Rješenja zadataka:

1. 3000 eura
2. (a) $T(x) = 5100 + 140x$
   (b) 85
3. $x_0 = 4000$ kom, 11500 kom
4. $x_0 = 1$ euro
5. b) $x_0 = 2$ eura, 15 kom
6. $x_0 = 2(00$ eura)
7. (a) 90 eura
   (b) 190 eura
   (c) $P(x) = 200x, D(x) = 220x - 3x^2 - 90$
8. 80 eura
9. 1 000 l lož ulja, 5 000 l benzina
10. 12°C, 27°C, nakon 0.33 mjeseca
11. 25 mjesta, 5625 eura
12. 30 komada, 500 eura
13. 81.87%
14. b) $x = -2$
15. (a) 50 mil.
    (b) 91.1 mil.
16. 6.93 god
17. (a) 3,6,8
    (b) 10 puta
18. (a) 250 000
    (b) 167 580
    (c) 5.76 h
19. 8.66 dana
20. (a) 20 dB
    (b) 70 dB

7. Domena, limes, operacije s funkcijama

7.1 Osnovna svojstva funkcija

Pojam funkcije je vrlo općenit i obuhvaća sve moguće vrste ovisnosti jedne veličine o drugoj. Pokazuje se da najveći broj funkcija koje se pojavljuju u primjenama ima i neka dodatna svojstva. U ovom odjeljku dajemo pregled svojstava realnih funkcija realne varijable koja su za primjene najznačajnija.

Definicija 7.1.1 — Injekcija, surjekcija i bijekcija.
Funkcija $f : \mathscr{D} \to \mathscr{K}$ je **injekcija** ako za $x_1, x_2 \in \mathscr{D}$ uvjet $x_1 \neq x_2$ povlači $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Funkcija $f : \mathscr{D} \to \mathscr{K}$ je **surjekcija** ako za svaki $y \in \mathscr{K}$ postoji $x \in \mathscr{D}$ takav da je $y = f(x)$.
Funkcija $f : \mathscr{D} \to \mathscr{K}$ je **bijekcija** ako je injekcija i surjekcija.

Funkcija f koja je injekcija različitim vrijednostima argumenta pridružuje različite funkcijske vrijednosti. Kolokvijalno se još kaže da f ne lijepi argumente. Injektivnost se ponekad definira i uvjetom da jednakost slika povlači jednakost originala, tj. $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$. Taj je uvjet ekvivalentan onom iz definicije. Primijetimo da je funkcija surjektivna ako i samo ako je njena kodomena upravo jednaka njenoj slici, tj. $\mathscr{K} = \mathscr{R}(f)$. Injektivnost, surjektivnost i bijektivnost su važna svojstva realnih funkcija. S njima se najčešće susrećemo kod rješavanja jednadžbi. Surjektivnost osigurava postojanje rješenja, a injektivnost njegovu jedinstvenost.
Sljedeće važno svojstvo realnih funkcija je svojstvo neprekidnosti.

Definicija 7.1.2 — Neprekidna funkcija. Funkcija $f : \mathscr{D} \to \mathscr{K}$ je **neprekidna** u točki $x_0 \in \mathscr{D}$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da

$$(|x - x_0| < \delta) \Longrightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon). \tag{7.1}$$

Funkcija je neprekidna na intervalu $I \subseteq \mathscr{D}$ ako je neprekidna u svakoj točki intervala I.

Ova je definicija samo formalizacija zahtjeva da mali pomaci u argumentu rezultiraju malim pomacima u vrijednosti funkcije.
Od funkcija koje smo do sada upoznali, polinomi i eksponencijalne funkcije su neprekidne na

cijelom $\mathbb{R}$. Logaritamske funkcije su neprekidne na cijelom $\mathbb{R}^+$. Zbroj, razlika i umnožak neprekidnih funkcija su neprekidne funkcije.

Definicija 7.1.3 — Ograničena funkcija. Funkcija $f : \mathscr{D} \to \mathscr{K}$ je ograničena na skupu $I \subseteq \mathscr{D}$ ako postoje realni brojevi m i M takvi da je za sve $x \in I$

$$m \leq f(x) \leq M. \tag{7.2}$$

Svaka funkcija neprekidna u točki x_0 je i ograničena na nekoj okolini te točke.

7.2 Graf, domena i slika funkcije

Ako je poznat graf funkcije, domenu funkcije moguće je odrediti kao projekciju grafa na x os, a sliku funkcije kao projekciju grafa na y os.

Vježba 7.1 Očitajte s grafova domene i slike funkcija $f(x) = e^{x^2-1}$ i $g(x) = \sqrt{2x-4} - 1$.

Slika 7.1: Ilustracija grafova funkcija

$\mathscr{D}(f) = \mathbb{R}, \mathscr{R}(f) = [e^{-1}, \infty\rangle, \quad \mathscr{D}(g) = [2, \infty\rangle, \mathscr{R}(g) = [-1, \infty\rangle$

Vježba 7.2 Skicirajte graf i odgovorite:

1. Za koje x je funkcija $f(x) = 5x - 6 - x^2$ negativna? $x \in \langle -\infty, 2\rangle \cup \langle 3, \infty\rangle$
2. Koja je najveća vrijednost funkcije $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ za $x \in [2,3]$. $f(2) = -1$

7.2.1 Određivanje domene funkcije

Domenu funkcije kojoj ne znamo graf možemo odrediti algebarski. Domena polinoma je čitav skup realnih brojava. Kod domene racionalnih funkcija iz $\mathbb{R}$ treba izbaciti nultočke nazivnika. Kod iracionalnih funkcija (korijena) treba imati na umu da se parni korijeni mogu vaditi samo iz nenegativnih brojeva. Na kraju, logaritme možemo vaditi samo iz pozitivnih brojeva. Dakle, u većini se slučajeva određivanje domene svodi na rješavanje nejednadžbi.

Vježba 7.3 Odredite domene zadanih funkcija:

1. $f(x) = x^3 + 3x^2$ $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \frac{2}{x+1}$ $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
3. $f(x) = \sqrt{x^3 - x^2}$ $\mathscr{D}(f) = [1, \infty\rangle$

4. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ $\mathscr{D}(f) = \langle -\infty, 1] \cup [2, \infty\rangle$
5. $f(x) = \log(x^2 - 4)$ $\mathscr{D}(f) = \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle$
6. $f(x) = \sqrt{\ln(x-1)}$ $\mathscr{D}(f) = [2, \infty\rangle$
7. $f(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}}$ $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Vježba 7.4 Odredite interval na kome je funkcija $f(x) = \ln(\sqrt{x} - 1)$ pozitivna. $[4, +\infty\rangle$

7.2.2 Parnost i neparnost funkcije

Funkciju f za koju je $f(-x) = f(x)$ zovemo **parna** funkcija. Graf svake parne funkcije simetričan je obzirom na y os ili neki pravac paralelan y-osi. Ako vrijedi $f(-x) = -f(x)$, funkciju s tim svojstvom zovemo **neparna** funkcija. Graf neparne funkcije simetričan je obzirom na ishodište.

Vježba 7.5 Odredite $f(-x)$ te utvrdite je li zadana funkcija parna, neparna ili niti jedno od toga:

1. $f(x) = x^3$ neparna
2. $f(x) = \frac{2}{x}$ neparna
3. $f(x) = x^3 - x^2$ ni parna ni neparna
4. $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ parna

7.3 Granična vrijednost (limes) funkcije

Limes ili granična vrijednost funkcije određuje su u točkama koje su za funkciju "problematične". To su primjerice vrijednosti izbačene iz domene ili one koje su konačni rubovi domene, a nisu u domeni.
Donosimo matematički egzaktnu definiciju limesa funkcije.

Definicija 7.3.1 — Limes funkcije. Neka je f funkcija definirana u svakoj točki intervala I osim možda u $a \in I$. Za realan broj L kažemo da je **granična vrijednost (limes)** funkcije f u točki a ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve $x \in I \setminus \{a\}$ vrijedi

$$(|x-a| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - L| < \varepsilon). \tag{7.3}$$

Ako je L limes funkcije f u točki a, pišemo

$$L = \lim_{x \to a} f(x). \tag{7.4}$$

Zapis čitamo: "L je limes od $f(x)$ kad x teži k a". Kolokvijalno govoreći, L je limes od $f(x)$ kad x teži u a ako vrijednost $f(x)$ postaje po volji blizu vrijednosti L kako x postaje sve bliži i bliži vrijednosti a.
Formalno se definiraju i **jednostrani limesi** funkcije.

Definicija 7.3.2 — Jednostrani limes. Neka je funkcija f definirana u svakoj točki intervala I osim možda u $a \in I$. Za realan broj L_1 kažemo da je **limes slijeva** od $f(x)$ u točki a ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je $\langle a - \delta, a\rangle \subseteq I$ te vrijedi

$$(x < a \text{ i } |x-a| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - L_1| < \varepsilon).$$

Pišemo $L_1 = \lim_{x \to a-} f(x)$.
Za realan broj L_2 kažemo da je **limes zdesna** od $f(x)$ u točki a ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$

takav da je $\langle a, a+\delta\rangle \subseteq I$ te vrijedi

$$(x > a \text{ i } |x-a| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - L_2| < \varepsilon). \tag{7.5}$$

Pišemo $L_2 = \lim_{x\to a+} f(x)$.

Pokazuje se da vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 7.3.1 Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval. Funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ je neprekidna u točki $x_0 \in I$ ako i samo ako postoje i lijevi i desni limes funkcije f u točki x_0 te je

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0). \tag{7.6}$$

Tri su osnovne vrijednosti limesa koje se koriste u određivanju limesa funkcija. Intuitivno su jasne i navodimo ih bez dokaza:

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0. \tag{7.7}$$

■ **Primjer 7.1** Odredimo $\lim_{x\to 0} \ln x$.

Rješenje: Granici 0 ne možemo prići s nezavisnom varijablom slijeva jer je domena funkcije $f(x) = \ln x$ skup $\langle 0, \infty\rangle$. Stoga vrijednosti 0 prilazimo zdesna; pišemo:

$$\lim_{x\to 0_+} \ln x.$$

Zapis čitamo: "limes kad x teži k 0 zdesna" od $\ln x$. Poznavajući graf funkcije $f(x) = \ln x$ znamo

$$\lim_{x\to 0_+} \ln x = -\infty$$

■

Vježba 7.6 Odredite sljedeće limese:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^2-1}, \quad \lim_{x\to 1_+} \frac{x+2}{x-1}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{x-2}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x^2-2}, \quad \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{2x+3}{x-2}\right)$$

$-1/2, \infty, 2, 0, \ln 2$

Veza računanja limesa funkcije i asimptote grafa funkcije

Limese koristimo u nalaženju asimptota grafa funkcije i ispitivanja ponašanja funkcija u njihovoj okolini. Tri su vrste asimptota koje graf funkcije može imati:

1. Asimptote mogu biti horizontalne. Ako je $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$, pravac $y = a$ je jednostrana desna horizontalna asimptota grafa funkcije f.

   Ako je $\lim_{x\to -\infty} f(x) = b$, $b \in \mathbb{R}$, pravac $y = b$ je jednostrana lijeva horizontalna asimptota grafa funkcije f.

   Ako je $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$, pravac $y = a$ je (obostrana) horizontalna asimptota grafa funkcije f.

   Ako je $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty, c \in \mathbb{R}$, pravac $x = c$ je vertikalna asimptota grafa funkcije f.

2. Vertikalne asimptote grafa funkcije su pravci paralelni y-osi. One postoje u slučaju kad domena funkcije ima konačne rubove koji ne pripadaju domeni: $\mathscr{D}(f) = \langle -\infty, a\rangle$ ili $\mathscr{D}(f) = \langle b, \infty\rangle$ (moguća je i unija ova dva intervala) te $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R}\setminus\{c\}$. Kako bi se ispitalo ponašanje funkcije na rubovima domene, valja ovisno o slučaju odrediti:

$$\lim_{x\to a_-} f(x), \quad \lim_{x\to b_+} f(x) \quad \text{te} \quad \lim_{x\to c_-} f(x) \quad \text{i} \quad \lim_{x\to c_+} f(x). \tag{7.8}$$

3. Koeficijenti a i b u jednadžbi kose asimptote $y = ax + b$ nalaze se po formulama:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax). \tag{7.9}$$

■ **Primjer 7.2** Odredimo horizontalne asimptote grafa funkcije $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

Rješenje: Računamo

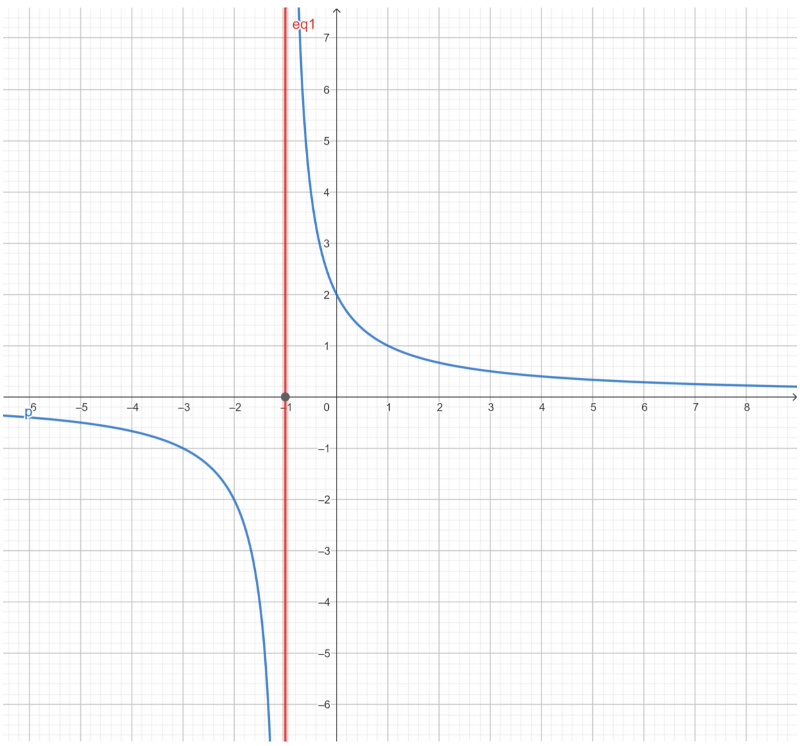
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+e^x} = \left(\frac{1}{1+e^\infty} = \frac{1}{\infty}\right) = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^x} = \left(\frac{1}{1+e^{-\infty}} = \frac{1}{1+\frac{1}{e^\infty}} = \frac{1}{1+0}\right) = 1$$

Dakle, pravac $y = 0$ je jednostrana desna horizontalna asimptota, a pravac $y = 1$ je jednostrana lijeva horizontalna asimptota grafa funkcije.

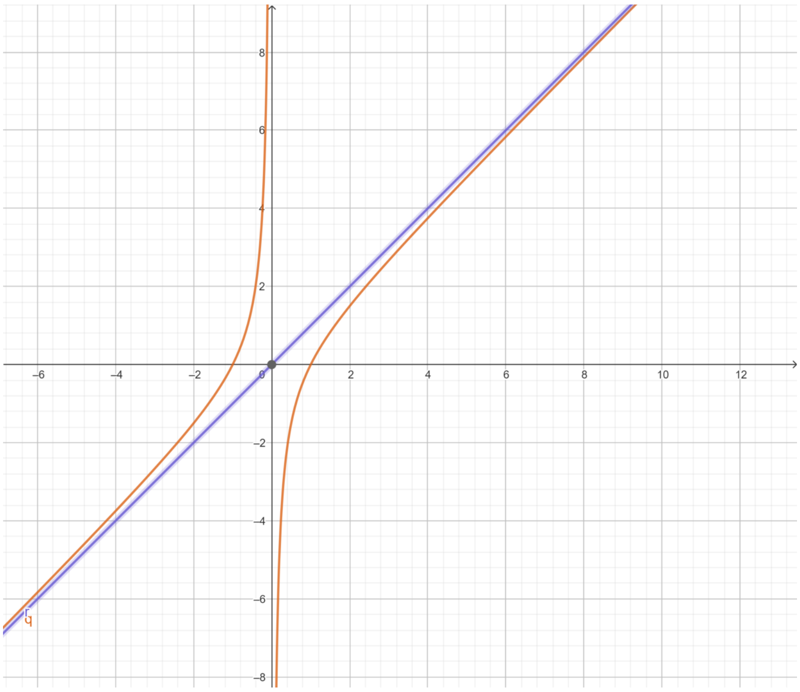
■

Asimptote funkcije vidljive su s grafa funkcije. Primjerice, vertikalna asimptota funkcije $f(x) = \frac{2}{x+1}$ je pravac $x = -1$, a ta funkcija ima i horizontalnu asimptotu (x-os):



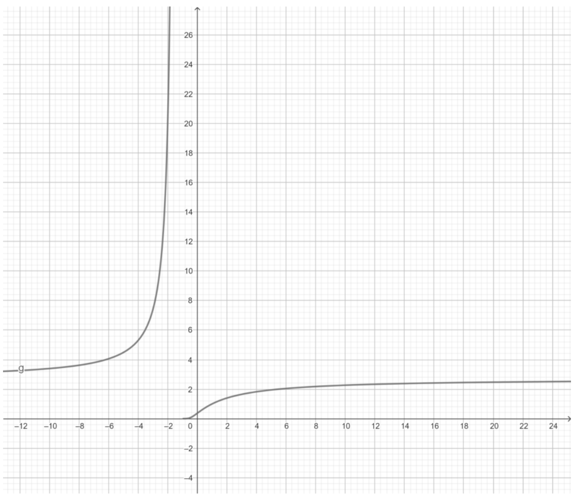
Slika 7.2: Ilustracija vertikalne asimptote grafa funkcije

Na sljedećoj je slici primjer funkcije $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$ koja ima kosu asimptotu $y = x$.



Slika 7.3: Ilustracija kose asimptote grafa funkcije

■ **Primjer 7.3** Očitajmo s grafa funkcije asimptote funkcije $f(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}}$. Odredimo ih računski.



Slika 7.4: Graf funkcije $f(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}}$

Rješenje: Kako bi se ispitalo ponašanje funkcije u okolini vertikalne asimptote $x = -1$, računamo $\lim_{x\to -1_-} e^{\frac{x-1}{x+1}}$ i $\lim_{x\to -1_+} e^{\frac{x-1}{x+1}}$.

$$\lim_{x\to -1_-} e^{\frac{x-1}{x+1}} = e^{\lim_{x\to -1_-} \frac{x-1}{x+1}} = e^{\frac{-2}{-0}} = e^{\infty} = \infty$$

$$\lim_{x\to -1_+} e^{\frac{x-1}{x+1}} = e^{\lim_{x\to -1_+} \frac{x-1}{x+1}} = e^{\frac{-2}{0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$$

Dakle, samo je pozitivni dio pravca $x = -1$ vertikalna asimptota grafa (funkcija f uopće nema negativnih vrijednosti!).
Za određivanje horizontalne asimptote treba naći: $\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x-1}{x+1}}$ i $\lim_{x\to\infty} e^{\frac{x-1}{x+1}}$. U oba slučaja rješenje je e pa je horizontalna asimptota pravac $y = e$.

■

7.4 Operacije s funkcijama

7.4.1 Kompozicija funkcija

Vježba 7.7 Naftna mrlja kružnog oblika polumjera r ima površinu $P(r) = r^2\pi$. Polumjer mrlje raste s vremenom; porast je opisan formulom $r(t) = 1+t$. Kako površina mrlje ovisi o vremenu?

$P(t) = (1+t)^2\pi$

Postupak iz vježbe ilustracija je načina kojim od poznatih funkcija možemo dobiti nove.

Definicija 7.4.1 — Kompozicija funkcija. Za zadane realne funkcije $f : \mathscr{D} \to \mathscr{K}$ i $g : \mathscr{D}' \to \mathscr{K}'$ takve da je $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{D}'$ definiramo realnu funkciju $h = g \circ f$ na sljedeći način:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)]. \tag{7.10}$$

Kažemo da je funkcija h **kompozicija** funkcija f i g.

■ **Primjer 7.4** Odredimo kompozicije $g \circ f$ i $f \circ g$ funkcija $f(x) = 3x$ i $g(x) = x^2 - 1$.

Rješenje:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x) = (3x)^2 - 1 = 9x^2 - 1$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 1) = 3(x^2 - 1) = 3x^2 - 3$$

■

Iz primjera vidimo da operacija kompozicije funkcija nije komutativna, tj. da je općenito $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$. Ako vrijednosti funkcije f pripadaju domeni funkcije f, možemo funkciju f komponirati i samu sa sobom. U takvom slučaju pišemo $f^2 = f \circ f$. Ovdje treba biti oprezan i ne miješati oznaku s operacijom kvadriranja vrijednosti funkcije f.

7.4.2 Inverzna funkcija

Promotrimo par funkcija $f(x) = 2x+3$ i $g(x) = \frac{x-3}{2}$. Lako se vidi da je $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$. Znači, ukupni učinak djelovanja funkcija f i g u bilo kojem poretku ostavlja argument x netaknutim. U takvom slučaju funkciju $g(x)$ zovemo inverzom funkcije $f(x)$ (i obratno) i pišemo $g = f^{-1}$. Moguće je odrediti inverznu funkciju zadanoj.

■ **Primjer 7.5** Odredimo inverznu funkciju funkcije $f(x) = \ln(3x+5)$

Rješenje: Inverz funkcije $f(x) = y$ nalazi se rješavanjem jednadžbe $f(y) = x$ po y. Dakle, prvo zapišemo $\ln(3y+5) = x$, a potom određujemo y. Dakle, imamo $3y+5 = e^x$ što povlači $y = \frac{e^x-5}{3}$. Stoga je $f^{-1}(x) = \frac{e^x-5}{3}$. To je moguće provjeriti komponiranjem s $f(x)$ slijeva i zdesna.

■

Vježba 7.8 Odredite inverznu funkciju za $f(x) = \frac{x+3}{3x-2}$. $f^{-1}(x) = \frac{-2x-3}{1-3x}$

7.5 Zadatci za vježbanje

1. Odredite domene funkcija:
   (a) $f(x) = \sqrt{x - x^3}$
   (b) $f(x) = \frac{1}{x^3 - x}$
   (c) $f(x) = \sqrt{2 - x + x^2}$
   (d) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{3-x}$
   (e) $f(x) = \log(x^2 + x)$
   (f) $f(x) = \frac{2}{1 + \ln x}$
2. Odredite sljedeće limese:
   (a) $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$
   (b) $\lim_{x\to 1-} \frac{x+2}{x-1}$
   (c) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3}{x-2}$
   (d) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x^2+2}$
   (e) $\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$
3. Odredite $f \circ g, g \circ f, f^2, g^2$ za $f(x) = 2x + 1$ i $g(x) = x - 2$.
4. Odredite $f \circ g, g \circ f$ za
   (a) $f(x) = x^2, g(x) = \frac{1}{x+1}$
   (b) $f(x) = 2x + 3, g(x) = \frac{x-3}{2}$
   (c) $f(x) = e^{7x}, g(x) = \frac{x^2}{7}$
5. Odredite funkciju $h(x) = (g \circ f)(x)$ ako je:
   (a) $g(x) = e^x$, $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$
   (b) $g(x) = \ln x$, $f(x) = 2x + 1$
6. Odredite inverze funkcija g i f iz (a) dijela prethodnog zadatka.
7. Odredite inverze funkcija:
   (a) $f(x) = \frac{10^x}{10^x - 1}$
   (b) $fx) = \ln(2x - 7)$
   (c) $f(x) = e^{\frac{2x-1}{2x}}$
   (d) $f(x) = \ln(\frac{2x+1}{x})$
   (e) $f(x) = 10^{\frac{2}{x+1}} - 5$

Rješenja zadataka

1. (a) $\langle -\infty, -1] U [0, 1]$
   (b) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$
   (c) $\mathbb{R}$
   (d) $[-1, 3]$
   (e) $\langle -\infty, -1] U \langle 0, +\infty\rangle$
   (f) $\langle 0, +\infty\rangle \setminus \{e^{-1}\}$
2. (a) $\frac{1}{4}$
   (b) $-\infty$
   (c) ∞
   (d) 0
   (e) 0
3. redom $2x-3, 2x-1, 2x+3, x-4$
4. (a) $\left(\frac{1}{x+1}\right)^2, \frac{1}{x^2+1}$
   (b) x, x
   (c) $e^{x^2}, \frac{e^{14x}}{7}$
5. (a) $e^{\frac{x-1}{x+3}}$
   (b) $\ln(2x+1)$
6. redom $\ln x, \frac{3x+1}{1-x}$
7. (a) $f^{-1}(x) = \log \frac{x}{x-1}$
   (b) $f^{-1}(x) = \frac{e^x+7}{2}$
   (c) $f^{-1}(x) = -\frac{1}{\ln x - 2}$
   (d) $f^{-1}(x) = \frac{1}{e^x-2}$
   (e) $f^{-1}(x) = \frac{2-\log(x+5)}{\log(x+5)}$

8. Derivacije funkcija

8.1 Pojam i značenje derivacije

Derivacija funkcije definira se preko limesa.

Definicija 8.1.1 — Derivabilna funkcija. Neka je zadana funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ i $x \in I$. Kažemo da je funkcija f **diferencijabilna (derivabilna)** u točki x ako postoji realni broj

$$\lim_{\triangle x \longrightarrow 0} \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x}. \tag{8.1}$$

Taj realni broj zove se **derivacija funkcije** f **u točki** x i označava s $f'(x)$. Kažemo da je f derivabilna na I ako je derivabilna u svakoj točki $x \in I$. Tada je s $x \mapsto f'(x)$ zadana nova funkcija $f' : I \to \mathbb{R}$, **derivacija** funkcije f na I.

Koje je značenje vrijednosti $f'(x_0)$, vrijednosti derivacije funkcije f u točki x_0?

1. Ona opisuje nagib grafa funkcije f u zadanoj točki x_0. Po iznosu je $f'(x_0) = k$, za koeficijent k smjera tangente na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$.
2. Derivacija f' funkcije f zadaje trenutnu veličinu promjene zavisne varijable $y = f(x)$ u odnosu na nezavisnu varijablu x.

Naravno, trenutnu veličinu promjene funkcije možemo interpretirati kao trenutnu brzinu, kao granični trošak (slijedi), ovisno o tome što opisuje početna funkcija f.

Ima slučajeva kad funkcija f u točki x nije diferencijabilna (derivabilna):

1. derivacija ne postoji u točki gdje limes nije konačan,
2. derivacija ne postoji u točki u kojoj limes nije jedinstven, tj. funkcija ima skok ili šiljak:

$$\lim_{x \longrightarrow a_-} f(x) \neq \lim_{x \longrightarrow a_+} f(x) \tag{8.2}$$

8.2 Derivacije elementarnih funkcija

Derivaciju f' derivabilne funkcije f određujemo po definiciji.

Primjer 8.1 Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = x^2$ i interpretirajmo značenje vrijednosti $f'(\frac{1}{2})$.

Rješenje: Računamo

$$\begin{aligned} \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x} &= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{(x+\triangle x)^2 - x^2}{\triangle x} \\ &= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{x^2+2x\triangle x+(\triangle x)^2-x^2}{\triangle x} \\ &= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle x(2x+\triangle x)}{\triangle x} = 2x. \end{aligned}$$

Dakle, funkcija $g(x) = 2x$ je derivacija funkcije $f(x) = x^2$. Pišemo $f'(x) = 2x$. Sad je $f'(\frac{1}{2}) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$. To znači da je koeficijent smjera tangente na graf funkcije $f(x) = x^2$ u točki $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ jednak 1. Tangenta je pravac $y = x - \frac{1}{4}$.

■

Vrijednosti derivacija elementarnih funkcija

1. Za konstantnu funkciju $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ je $f(x+\triangle x) - f(x) = c - c = 0$, znači $c' = 0$.
2. Za $m \in \mathbb{R}$ i funkciju $f(x) = x^m$ je $f'(x) = mx^{m-1}$.
3. Derivacija eksponencijalne funkcije $f(x) = a^x$ $(a \neq 1, a > 0)$ je $f'(x) = a^x \ln a$. Posebno je $(e^x)' = e^x$.
4. Za $a \neq 1, a > 0$ i logaritamsku funkciju $f(x) = \log_a x$ je $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$. Posebno je $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

8.3 Tehnika određivanja derivacije funkcije

Deriviranje funkcije je tehnika koja funkciji f pridružuje funkciju f' (čita se "ef crtano") koju zovemo **derivacija** funkcije f.

8.3.1 Kuharica za tehniku određivanja derivacije funkcije

Uz poznate derivacije potencija i elementarnih funkcija te primjenom pravila za određivanje derivacija, može se odrediti derivacija ma kako složene funkcije.

Tablica derivacija elementarnih funkcija

Neka je je $c \in \mathbb{R}$ konstanta. Vrijednosti derivacija zapišimo u tablicu.

f	c	x^m	e^x	a^x	$\ln x$	$\log_a x$
f'	0	mx^{m-1}	e^x	$a^x \ln a$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x \ln a}$

Vježba 8.1 Uz pomoć tablice derivacija elementarnih funkcija odredimo derivacije sljedećih elementarnih funkcija:

- $f(x) = x^4$ — $f'(x) = 4x^3$
- $f(x) = 2^x$ — $f'(x) = 2^x \ln 2$
- $f(x) = \frac{1}{x^2}$ — $\frac{1}{x^2} = x^{-2}, f'(x) = -\frac{2}{x^3}$
- $f(x) = \log_3 x$ — $f'(x) = \frac{1}{x \ln 3}$
- $f(x) = \sqrt{x}$ — $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $f(x) = \ln x$ — $f'(x) = \frac{1}{x}$

Derivacija linearne kombinacije funkcija

■ **Primjer 8.2** Korištenjem pravila $(cf)' = cf'$ i $(f \pm g)' = f' \pm g'$ odredimo derivaciju funkcije $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

Rješenje:

$$f'(x) = (2x^3 - 3x^2 + 1)' = 2(x^3)' - 3(x^2)' + 1' = 6x^2 - 6x + 0 = 6x(x-1)$$

■

Vježba 8.2 Korištenjem pravila $(cf)' = cf'$ i $(f \pm g)' = f' \pm g'$ odredite derivacije funkcija:

- $f(x) = 2^x + 3x$ — $f'(x) = 2^x \ln 2 + 3$
- $f(x) = 3x^2 + 5x - 7$ — $f'(x) = 6x + 5$
- $f(x) = 2x + 3\log_3 x$ — $f(x) = 2 + \frac{3}{x \ln 3}$
- $f(x) = x^3 - 3x^2$ — $f'(x) = 3x^2 - 6x$
- $f(x) = \frac{2}{x} + 2x + 5$ — $f'(x) = \frac{-2}{x^2} + 2$
- $f(x) = x^2 + 3e^x$ — $f'(x) = 2x + 3e^x$
- $f(x) = -2e^x + \ln x$ — $f'(x) = -2e^x + \frac{1}{x}$

Derivacija produkta funkcija

■ **Primjer 8.3** Odredimo derivaciju produkta funkcije $f(x) = x^3 \ln x$ po pravilu $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

Rješenje:

$$(x^3 \ln x)' = (x^3)' \ln x + x^3 (\ln x)' = 3x^2 \ln x + x^3 \frac{1}{x} = 3x^2 \ln x + x^2 = x^2(3\ln x + 1)$$

■

Vježba 8.3 Odredite derivacije sljedećih funkcija korištenjem pravila $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

- $f(x) = xe^x$ — $f'(x) = (1+x)e^x$
- $f(x) = x^2 2^x$ — $f'(x) = x2^x(2 + x\ln 2)$
- $f(x) = x \ln x$ — $f'(x) = \ln x + 1$
- $f(x) = x^2 \ln x$ — $f'(x) = x(2\ln x + 1)$
- $f(x) = e^x \sqrt{x}$ — $f'(x) = e^x(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}})$
- $f(x) = x^2 e^x$ — $f'(x) = xe^x(2+x)$

Derivacija kvocijenta funkcija

■ **Primjer 8.4** Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ koristeći pravilo derivacije kvocijenta funkcija $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Rješenje:

$$\left(\frac{x}{\ln x}\right)' = \frac{x'\ln x - x(\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{1 \cdot \ln x - x\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

■

Vježba 8.4 Odredite derivacije funkcija koristeći pravilo za derivaciju kvocijenta $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

- $f(x) = \frac{3x+1}{5x+2}$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{(5x+2)^2}$
- $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ $\qquad f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$
- $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$ $\qquad f'(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$
- $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ $\qquad f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$
- $f(x) = \frac{x}{e^x}$ $\qquad f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$
- $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$ $\qquad f'(x) = \frac{x(2\ln x - 1)}{\ln^2 x}$

Derivacija složene funkcije

Ako je funkcija složena, u nalaženju njezine derivacije primjenjuju se sljedeća pravila deriviranja.

funkcija	g^m	e^g	a^g	$\ln g$	$\log_a g$	$\sqrt{g}$
derivacija	$mg^{m-1}g'$	$e^g g'$	$a^g g' \ln a$	$\frac{1}{g}g'$	$\frac{1}{g\ln a}g'$	$\frac{1}{2\sqrt{g}}g'$

■ **Primjer 8.5** Primjenjujući pravila za derivaciju složene funkcije, odredimo derivaciju funkcije $f(x) = \ln(x^2+2x)$.

Rješenje: Pravilo navodi da je $(\ln g)' = \frac{1}{g} \cdot g'$, stoga imamo

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+2x} \cdot (x^2+2x)' = \frac{2x+2}{x^2+2x}.$$

■

Vježba 8.5 Odredite derivacije sljedećih složenih funkcija:

- $f(x) = e^{x^2}$ $\qquad (e^g)' = e^g g', f'(x) = 2xe^{x^2}$
- $f(x) = \ln(x^2+3x-2)$ $\qquad f'(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x-2}$
- $f(x) = \sqrt{x^2+3}$ $\qquad \sqrt{g}' = \frac{1}{2\sqrt{g}}g', f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$
- $f(x) = (3+2x^2)^4$ $\qquad (g^n)' = ng^{n-1}g', f'(x) = 16x(3+2x^2)^3$
- $f(x) = e^{x^2-x+10}$ $\qquad f'(x) = e^{x^2-x+10}(2x-1)$
- $f(x) = \ln(\ln x)$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{x\ln x}$
- $f(x) = \sqrt{1-3x^2}$ $\qquad f'(x) = \frac{-3x}{\sqrt{1-3x^2}}$
- $f(x) = e^{2\ln x+3}$ $\qquad f'(x) = \frac{2}{x}e^{2\ln x+3}$

Korištenjem tabličnih derivacija i odgovarajućeg pravila, moguće je odrediti derivaciju bilo koje funkcije.

Derivacije elementarnih funkcija

f	f'
c	0
x^m	mx^{m-1}
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

Derivacije složenih funkcija

f	f'
g^m	$mg^{m-1}g'$
e^g	$e^g g'$
a^g	$a^g \ln a \cdot g'$
$\ln g$	$\frac{1}{g}g'$
$\log_a g$	$\frac{1}{g \ln a}g'$
$\sqrt{g}$	$\frac{1}{2\sqrt{g}}g'$

Pravila deriviranja

$$\begin{aligned}
(cf)' &= cf' \\
(f \pm g)' &= f' \pm g' \\
(f \cdot g)' &= f'g + fg' \\
\left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2}
\end{aligned}$$

Vježba 8.6 Odredite derivacije sljedećih funkcija:

- $f(x) = 2^{\ln(x^2+x)+1}$ — $f'(x) = 2^{\ln(x^2+x)+1} \ln 2 \frac{2x+1}{x^2+x}$
- $f(x) = \frac{e^{3x}}{x}$ — $f'(x) = \frac{e^{3x}(3x+1)}{x^2}$
- $f(x) = \ln(\frac{x-1}{x+1})$ — $f'(x) = \frac{2}{x^2-1}$
- $f(x) = \sqrt{e^{2x}+3}$ — $f'(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+3}}$
- $f(x) = \sqrt{3+2x^2}$ — $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{3+2x^2}}$
- $f(x) = e^{(1+3x)^2}$ — $f'(x) = 6(1+3x)e^{(1+3x)^2}$
- $f(x) = \ln(\ln(x^2+2x-1))$ — $f'(x) = \frac{1}{\ln(x^2+2x-1)} \frac{2x+2}{x^2+2x-1}$
- $f(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{x}}$ — $f'(x) = \frac{-x^2-1}{2x^2\sqrt{\frac{1-x^2}{x}}}$

8.4 Derivacije višeg reda

Derivaciju funkcije f' zovemo drugom derivacijom funkcije f. Drugu derivaciju funkcije f označavamo s f''. Dakle,

$$f''(x) = (f'(x))'. \tag{8.3}$$

Slično bismo definirali i derivacije viših redova.

■ **Primjer 8.6** Odredimo $f''(x)$ za funkciju $f(x) = \ln x$.

Rješenje: Računamo

$$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1},$$
$$f''(x) = -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

■

8.5 Zadatci za vježbanje

Odredite derivacije sljedećih funkcija:

1. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 9$
2. $g(x) = x - \ln x$
3. $h(x) = x - x^2 - 7$
4. $i(x) = x^3 + 7x^2 - 12x + 10$
5. $j(x) = x^3 + 2x^2 + 3$
6. $k(x) = e^x(2x^2 - 3x + 5)$
7. $l(x) = 5x + 2e^x$
8. $m(x) = x^2(e^x - 4)$
9. $n(x) = \frac{x^2}{e^x}$
10. $o(x) = \frac{x^3}{\ln x}$
11. $p(x) = (x^4 - 8x^2 + 9)^2$
12. $r(x) = x \ln x$
13. $s(x) = x^2 - 2^x$
14. $t(x) = e^x - e^3$
15. $u(x) = x^3 e^x$
16. $v(x) = e^{2x+2}$
17. $z(x) = 5x + 3e^{-2x}$
18. $y(x) = \sqrt{e^{x^2}}$
19. $q(x) = \ln x^3 + 1$
20. $w(x) = \ln(x^3 + x)^2$
21. $e(x) = 50\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-1}$

22. $d(x) = 21e^{\frac{-1}{7}x^2}$
23. $c(x) = \ln^2 x$
24. $b(x) = \frac{1}{x^2+1}$
25. $a(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$
26. $f(x) = x^2 + x^3$
27. $g(x) = 4\ln x$
28. $h(x) = xe^x$
29. $r(x) = \frac{1+x}{1-x}$
30. $p(x) = \ln(x^2 + x)$
31. $f(x) = \frac{e^{3x}}{x}$
32. $f(x) = \ln(\frac{x-1}{x+1})$
33. $f(x) = \sqrt{e^{2x} + 3}$
34. $f(x) = \sqrt{3 + 2x^2}$
35. $f(x) = e^{(1+3x)^2}$
36. $f(x) = \ln(\ln(x^2 + 2x - 1))$
37. $f(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{x}}$
38. $f(x) = e^{\sqrt{x^2+x}}$

Rješenja zadataka

1. $f'(x) = 4x^3 - 16x$
2. $g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$
3. $h'(x) = 1 - 2x$
4. $i'(x) = 3x^2 + 14x - 12$
5. $j'(x) = 3x^2 + 4x$
6. $k'(x) = e^x(2x^2 + x + 2)$
7. $l'(x) = 5 + 2e^x$
8. $m'(x) = e^x(2x + x^2) - 8x$
9. $n'(x) = \frac{2x-x^2}{e^x}$
10. $o'(x) = \frac{x^2(3\ln x-1)}{(\ln x)^2}$
11. $p'(x) = 2(x^4 - 8x^2 + 9)(4x^3 - 16x)$
12. $r'(x) = \ln x + 1$
13. $s'(x) = 2x - 2^x \ln 2$
14. $t'(x) = e^x$
15. $u'(x) = e^x(3x^2 + x^3)$
16. $v'(x) = 2e^{2x+2}$

17. $z'(x) = 5 - 6e^{-2x}$
18. $y'(x) = \frac{xe^{x^2}}{\sqrt{e^{x^2}}}$
19. $q'(x) = \frac{3}{x}$
20. $w'(x) = \frac{6x^2+2}{x^3+x}$
21. $e'(x) = 50\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-2} x^{-2}$
22. $d'(x) = -6xe^{\frac{-1}{7}x^2}$
23. $c'(x) = \frac{2}{x}\ln x$
24. $b'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$
25. $a'(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$
26. $f'(x) = 2x + 3x^2$
27. $g'(x) = \frac{4}{x}$
28. $h'(x) = (1+x)e^x$
29. $r'(x) = \frac{2}{(1-x)^2}$
30. $p'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x}$
31. $f'(x) = \frac{e^{3x}(3x-1)}{x^2}$
32. $f'(x) = \frac{2}{(x-1)(x+1)}$
33. $f'(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+3}}$
34. $f'(x) = \frac{4x}{\sqrt{3+2x^2}}$
35. $f'(x) = e^{(1+3x)^2} \cdot 2(1+3x) \cdot 3$
36. $f'(x) = \frac{1}{\ln(x^2+2x-1)} \frac{2x+2}{x^2+2x-1}$
37. $f'(x) = \frac{-x^2-1}{2x\sqrt{\frac{1-x^2}{x}}}$
38. $f'(x) = e^{\sqrt{x^2+x}} \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}(2x+1)$

9. Derivacija - značenje i primjene

Značenje derivacije

Neka je $f(x)$ funkcija zadana na svojoj domeni $\mathscr{D}(f)$ te $x_0 \in \mathscr{D}(f)$. Po iznosu je $f'(x_0)$ jednak koeficijentu smjera tangente na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$. Kao takva, derivacija f' funkcije f daje podatak o brzini promjene $f(x)$ u odnosu na nezavisnu varijablu x. Jednadžba tangente na graf funkcije $f(x)$ u točki $(x_0, f(x_0))$ glasi

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \tag{9.1}$$

Vježba 9.1 Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ u točki koja je mjesto presjeka s y-osi.

$T(0,1), y = 1$

9.1 Određivanje intervala rasta i pada te lokalnih ekstrema funkcije

Teorem 9.1.1 Neka je f derivabilna funkcija na intervalu $I \subseteq \mathscr{D}(f)$. Funkcija f raste na intervalu I ako i samo ako za sve $x \in I$ vrijedi $f'(x) \geq 0$. Funkcija f pada na intervalu I ako i samo ako za sve $x \in I$ vrijedi $f'(x) \leq 0$.

Ukoliko su u teoremu nejednakosti u izrazima stroge, kaže se da funkcija na intervalu I strogo raste, odnosno strogo pada.

Definicija 9.1.1 — Stacionarna točka. Ako za neki $x_0 \in I$ vrijedi $f'(x_0) = 0$, točku x_0 (zapravo $(x_0, f(x_0))$) zovemo **stacionarnom (kritičnom) točkom** funkcije f.

Definicija 9.1.2 — Lokalni ekstremi. Za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ kažemo da u točki $a \in I$ ima **lokalni maksimum** ako postoji $\delta > 0$ takav da

$$(|x - a| < \delta) \Rightarrow (f(x) \leq f(a)). \tag{9.2}$$

Za funkciju f kažemo da u točki $a \in I$ ima **lokalni minimum** ako postoji $\delta > 0$ takav da

$$(|x-a| < \delta) \Rightarrow (f(x) \geq f(a)). \tag{9.3}$$

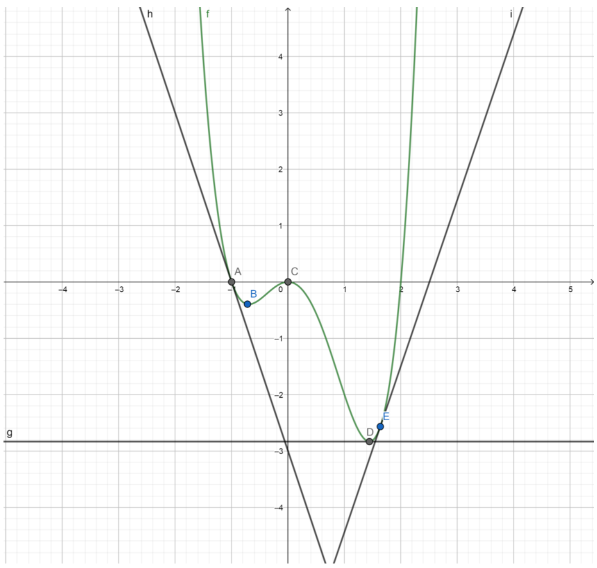
Kažemo da f u a ima **lokalni ekstrem** ako u a ima lokalni maksimum ili lokalni minimum.

Funkcija f ima u točki a lokalni minimum (maksimum) ako je $f(a)$ najmanja (najveća) vrijednost funkcije f u nekoj okolini točke a. U stacionarnoj točki funkcija može, ali i ne mora imati lokalni ekstrem. Točnije, funkcija f koja je diferencijabilna na intervalu $I = \langle a,b \rangle$ u stacionarnoj točki $x_0 \in I$ ima lokalni ekstrem ako postoji $\delta > 0$ takav da vrijednosti derivacije u točkama iz intervala $\langle x_0 - \delta, x_0 \rangle$ i onima iz intervala $\langle x_0, x_0 + \delta \rangle$ nemaju isti predznak. Ako je $f'(x) > 0$ za sve $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 \rangle$ i $f'(x) < 0$ za sve $x \in \langle x_0, x_0 + \delta \rangle$, onda f u točki x_0 ima lokalni maksimum. Ako je $f'(x) < 0$ za sve $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 \rangle$ i $f'(x) > 0$ za sve $x \in \langle x_0, x_0 + \delta \rangle$, onda je točka x_0 točka lokalnog minimuma. Ukoliko derivacija ne mijenja znak u stacionarnoj točki, ona nije točka lokalnog ekstrema.
Dakle, uz pomoć derivacije funkcije možemo odgovoriti na pitanje gdje funkcija raste ili pada (nagib tangente pozitivan ili negativan) te pronaći lokalne ekstreme funkcije.

9.1.1 Kritične (stacionarne) točke i lokalni ekstremi

Kandidati za lokalne ekstreme su kritične točke (ili stacionarne točke) koje pronalazimo rješavajući jednadžbu $f'(x) = 0$ jer je u mjestu lokalnog ekstrema nagib tangente jednak 0. Kritična točka x_0 je lokalni minimum ako je $f''(x_0) > 0$. Kritična točka x_0 je lokalni maksimum ako je $f''(x_0) < 0$. Ako je drugu derivaciju funkcije teško odrediti, priroda ekstrema u x_0 može se ispitati praćenjem predznaka vrijednosti prve derivacije u točkama iz okoline x_0. Kritična točka x_0 je lokalni minimum ako je $f'(x) < 0$ za $x < x_0$ i $f'(x_0) > 0$ za $x > x_0$. Ona je lokalni maksimum ako je $f'(x) > 0$, za $x < x_0$ i $f'(x_0) < 0$ za $x > x_0$. Ako je predznak $f'(x)$ jednak s obje strane x_0, tada x_0 nije lokalni ekstrem funkcije.

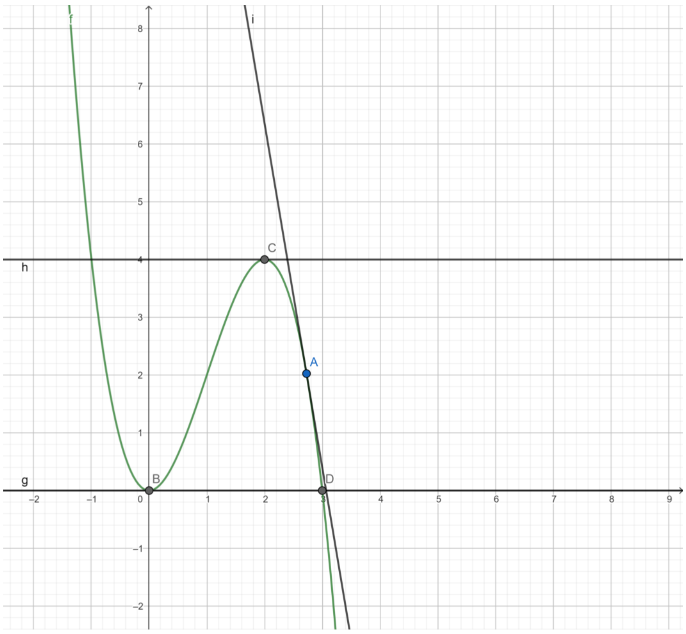
■ **Primjer 9.1** Na slici 9.1 je graf funkcije $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2$. Na grafu su istaknute točke A,B,C,D i E, te su povučene tangente na graf u točkama A,D i E. Odredimo s grafa mjesto lokalnih ekstrema funkcije. Je li koji od ekstrema globalni?



Slika 9.1: Nagibi tangenti na graf funkcije

■

Niže je graf funkcije $f(x) = 3x^2 - x^3$. Na njega su povučene tagente u točkama A, B i C (točke B i C su stacionarne točke).



Slika 9.2: Tangente na graf funkcije

Stacionarna točka ne mora biti lokalni ekstrem funkcije. Ona to jest ako derivacija mijenja predznak u stacionarnoj točki. Postoji postupak određivanja prirode ekstrema pomoću vrijednosti druge derivacije. On je sljedeći:

1. Odredimo f'.
2. Riješimo jednadžbu $f'(x) = 0$; svako njezino rješenje x_0 je stacionarna točka funkcije.
3. Odredimo drugu derivaciju funkcije f, dakle f''.
4. Računamo $f''(x_0)$ za svaku stacionarnu točku x_0. Ako je $f''(x_0) > 0$, u danoj točki funkcija ima lokalni minimum. Ako je $f''(x_0) < 0$, f u x_0 ima lokalni maksimum. Može se dogoditi da je i $f''(x_0) = 0$. U tom se slučaju određuju derivacije viših redova: $f'''(x), f^{iv}(x), \ldots$ te se određuju njihove vrijednosti u x_0. U računu dolazimo do derivacije nekog reda k takve da je $f^{(k)}(x_0) \neq 0$. Sada:
   (a) ako je broj k paran, u x_0 funkcija ima lokalni ekstrem (i to lokalni minimum ako je vrijednost pozitivna, lokalni maksimum ako je vrijednost negativna);
   (b) ako je k neparan broj, funkcija u x_0 nema lokalnog ekstrema.

   Ako je određivanje druge derivacije funkcije zahtjevno, tada se priroda ekstrema utvrđuje praćenjem promjene predznaka prve derivacije kako je već opisano.

■ **Primjer 9.2** Odredite sve kritične točke funkcije $f(x) = 3x^2 - x^3$ (graf na Slici 9.2) i ispitajte prirodu ekstrema u njima.

Rješenje: Prva derivacija funkcije je $f'(x) = 6x - 3x^2$, a njezine su nultočke $x_1 = 0, x_2 = 2$. Druga derivacija funkcije je $f''(x) = 6 - 6x$. Budući da je $f''(0) > 0$ za $x_1 = 0$ (točnije točki $B(0,0)$) funkcija ima lokalni minimum. Slično, $f''(2) < 0$ pa zaključujemo da funkcija za $x = 2$ (u točki $C(2,4)$) ima lokalni maksimum.

■

Vježba 9.2 Odredite sve kritične točke funkcija i prirodu ekstrema u njima.

1. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5$ — $x = 3$ lokalni minimum
2. $f(x) = x^3 + x^2 - 2$ — $x_1 = 0$ lok. min, $x_2 = -\frac{2}{3}$ lok. maksimum
3. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ — za $x = e$ lokalni maksimum $\frac{1}{e}$

Primjer 9.3 Odredimo ekstreme funkcije $f(x) = x^2e^x$.

Rješenje: Prva derivacija funkcije je $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = xe^x(2+x)$. Rješavanje jednadžbe $xe^x(2+x) = 0$ daje dvije vrijednosti $x_1 = 0, x_2 = -2$. Ovdje bi drugu derivaciju bilo nešto kompliciranije odrediti pa prirodu ekstrema u stacionarnim točkama možemo naći praćenjem promjene predznaka prve derivacije. Vrijednosti x_1 i x_2 dijele skup realnih brojeva na tri intervala, iz njih uzimamo konkretne vrijednosti x te gledamo (samo) predznak $f'(x)$:

	$x \in \langle -\infty, -2 \rangle$	$x \in \langle -2, 0 \rangle$	$x \in \langle 0, \infty \rangle$
predznak f'	$-$	$+$	$-$
ponašanje f	f pada $\searrow$	f raste $\nearrow$	f pada $\searrow$

Budući da prije $x_1 = 0$ funkcija pada, a poslije raste tu funkcija ima lokalni minimum. Prije $x_2 = -2$ funkcija raste, a poslije pada pa zaključujemo da f u točki $x = -2$ ima lokalni maksimum.

■

Vježba 9.3 Provjerite ima li funkcija $f(x) = x^3$ lokalnih ekstrema. nema

Vježba 9.4 Zadana je funkcija $f(x) = x^2 + 3x - 4$. Odredimo interval na kome funkcija raste te odredimo točku u kojoj ima lokalni ekstrem i prirodu ekstrema.

f raste za $x \in \langle -\frac{3}{2}, \infty \rangle$, ima lok. minimum u $T(-\frac{3}{2}, -\frac{19}{4})$

Vježba 9.5 Prihod mlina (u stotinama eura) od prodaje x tona brašna opisuje funkcija $P(x) = 6x^2 - x^3$. Odredite za koju količinu brašna je prihod mlina najveći.

stacionarne točke $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, x_2 je lokalni maksimum, $P(4) = 32$ stotine eura

Primjer 9.4 Odredimo lokalne ekstreme funkcije $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$.

Rješenje: Domena funkcije je $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Odredimo derivaciju funkcije po pravilu za kvocijent, ispada

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}.$$

Nultočka derivacije je $x_1 = 0$. Ekstreme određujemo ispitivanjem predznaka prve derivacije na intervalu negativnih i pozitivnih brojeva (ne uzimamo vrijednosti ± 1 jer nisu u domeni)

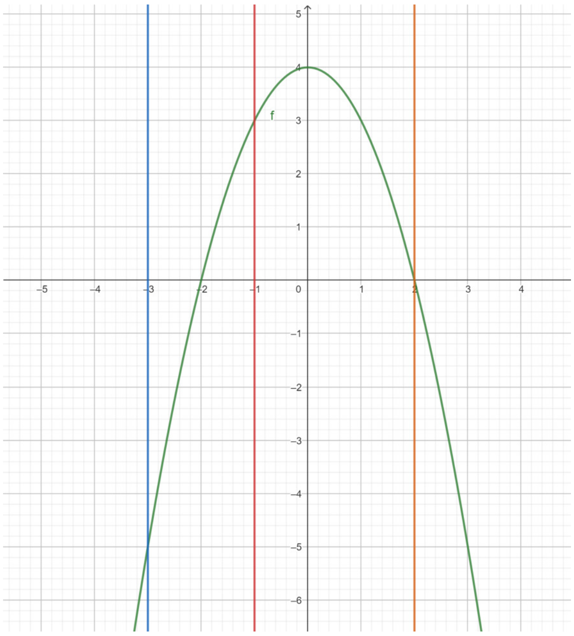
	$x \in \langle -\infty, 0 \rangle$	$x \in \langle 0, \infty \rangle$
predznak f'	$+$	$-$
ponašanje f	f raste $\nearrow$	f pada $\searrow$

Funkcija za $x = 0$ ima lokalni maksimum, dakle točka $(0, 0)$ mjesto je lokalnog maksimuma funkcije.

■

9.1.2 Ekstrem funkcije zadane na segmentu

Kad promatramo graf funkcije zadane na segmentu onda gledamo samo onaj dio grafa koji odgovara vrijednostima nezavisne varijable zadane segmentom. Ako je funkcija neprekidna u svakoj točki segmenta $[a,b]$, tada ona ima i minimalnu i maksimalnu vrijednost na $[a,b]$.



Slika 9.3: Ekstrem funkcije zadane na segmentu

Na slici 9.3 je graf funkcije $f(x) = 4 - x^2$. Vidimo da za $x \in [-3,-1]$ funkcija raste te na tom segmentu minimum postiže u lijevom rubu segmenta ($f(-3) = -5$), a maksimum u desnom ($f(-1) = 3$). Na segmentu $[-1,2]$ funkcija minimum postiže u desnom rubu segmenta ($f(2) = 0$), a maksimum u stacionarnoj točki ($f(0) = 4$).

Zaključujemo da se lokalni ekstremi funkcije zadane na segmentu postižu ili u stacionarnim točkama unutar segmenta ili na samim rubovima segmenta. One stacionarne točke funkcije koje ne pripadaju segmentu ne uzimaju se u obzir kod određivanja lokalnih ekstrema funkcije na segmentu. Obično je funkcija dobivena modelom upravo funkcija zadana na segmentu jer model pojave obično nije dobar daleko van segmenta za koji su dostupni podatci.

■ **Primjer 9.5** Zadana je funkcija ukupnih dnevnih troškova u eurima proizvodnje x komada proizvoda $T(x) = 1000 + 280x - 5x^2$. Odredite količinu proizvodnje za koju je trošak minimalan ako je dnevni kapacitet proizvodnje 57 komada.

Rješenje: Određujemo ekstrem funkcije $T(x)$ za $x \in [0,57]$. Odredimo stacionarnu točku. Nultočka prve derivacije (funkcije graničnog troška) $T'(x) = 280 - 10x$ je $x = 28$. Ova vrijednost pripada traženom segmentu. Minimum funkcije troška postiže se ili tu ili na rubovima segmenta, stoga jednostavno izračunamo vrijednost funkcije troška u te tri točke:

x	0	28	57
$T(x)$	1000	4920	715

Vidimo da je trošak minimalan za proizvodnju 57 proizvoda dnevno i iznosi 715 eura. (Maksimalan je pri proizvodnji 28 proizvoda dnevno i iznosi 4920 eura.)

■

■ **Primjer 9.6** Brzina prometa bila je snimana nekoliko tjedana. Podaci pokazuju da je prosječna brzina prometa (km/h) između 15 i 19 h zadana funkcijom

$$B(t) = t^3 - 10.5t^2 + 30t + 20,$$

gdje je t broj sati nakon podneva. U koje vrijeme između 15 i 19 h se promet kreće najbrže, a kad je najsporiji?

Rješenje: Određujemo ekstrem funkcije $B(t)$ za $t \in [3,7]$. Stacionarne točke su $t_1 = 5$ i $t_2 = 2$. Vrijednost t_2 ne pripada segmentu pa je odbacujemo. Računamo vrijednosti $B(t)$ za $t \in \{3,5,7\}$

t	3	5	7
$B(t)$	42.5	32.5	58.5

Zaključujemo da je promet najsporiji u 17 sati, a najbrži u 19 sati.

■

9.2 Geometrijsko značenje druge derivacije

Uzmimo da je funkcija f dva puta diferencijabilna na nekom intervalu I. Znamo da druga derivacija, f'', određuje brzinu promjene funkcije f'. Uz pomoć druge derivacije možemo provjeriti je li graf funkcije konveksnog ili konkavnog oblika.

Konveksni i konkavni oblik grafa funkcije može se opisati **međusobnim položajem grafa funkcije i njegovih tangenti**. Graf funkcije je konveksnog oblika u okolini one točke u kojoj se nalazi iznad svoje tangente kojoj je diralište ta točka. Graf je konkavnog oblika u okolini one točke u kojoj se nalazi ispod svoje tangente. Točkom infleksije zovemo mjesto gdje graf funkcije mijenja oblik iz konveksnog u konkavni ili obratno. Formalna definicija konveksnosti i konkavnosti funkcije je kako slijedi.

Definicija 9.2.1 — Konveksnost i konkavnost funkcije. Funkcija f je **konveksna** na intervalu I ako za sve $x_1, x_2 \in I$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \tag{9.4}$$

Funkcija f je **konkavna** na intervalu I ako za sve $x_1, x_2 \in I$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \tag{9.5}$$

Teorem 9.2.1 Neka je f diferencijabilna i f' diferencijabilna funkcija na intervalu I. Funkcija f je konveksna na intervalu I ako i samo ako je za sve $x \in I$ $f''(x) > 0$. Funkcija f je na intervalu I konkavna ako i samo ako je $f''(x) < 0$ za sve $x \in I$. Točka $x_0 \in I$ za koju je $f''(x_0) = 0$, a koja istodobno nije i točka lokalnog ekstrema je **točka infleksije**.

■ **Primjer 9.7** Leži li lokalni minimum funkcije f u intervalu na kome je f konveksna ili u intervalu na kome je f konkavna?

Rješenje: Budući je tangenta na graf funkcije u točki lokalnog minimuma ispod grafa funkcije, lokalni minimum leži u intervalu na kome je funkcija konveksna. Ovaj nas zaključak upućuje na na to da je kriterij postojanja lokalnog minimuma funkcije f za $x = x_0$ zbilja $f''(x_0) > 0$.

■

S ekonomskog je gledišta područje konveksnosti, odnosno konkavnosti grafa funkcije važno jer opisuje brzinu rasta (pada) funkcije. Primjerice, ako je zadana funkcija prihoda, zanima nas područje njezinog rasta. Područje konveksnog rasta zove se područje rastućeg prihoda. Za razliku od toga, područje konkavnog rasta zove se područje opadajućeg prihoda. Naime, iako prihodi i na ovom drugom području rastu, oni rastu s tendencijom usporavanja. To je moguće vidjeti na Slici 9.2. S grafa je vidljivo da funkcija $f(x) = 3x^2 - x^3$ raste na segmentu $[0,2]$. Međutim, ona raste i konveksna je na intervalu $\langle 0,1\rangle$, a na intervalu $\langle 1,2\rangle$ raste i konkavna je. Stoga, ako ta funkcija opisuje prihod neke proizvodnje u ovisnosti o količini proizvodnje x, možemo govoriti o intervalu $\langle 0,1\rangle$ kao intervalu rastućeg prihoda, a interval $\langle 1,2\rangle$ je za tu funkciju interval opadajućeg prihoda.

9.3 Analiza toka funkcije

Analizirati tok funkcije znači odrediti ključne informacije koje omogućuju skiciranje grafa funkcije. To su određivanje:

- domene funkcije, eventualne parnosti ili neparnosti,
- točaka presjeka grafa s x- osi (nultočki) koje se dobivaju rješavanjem jednadžbe $f(x) = 0$ i točke presjeka grafa s y osi koja se dobiva računanjem $f(0)$,
- asimptota funkcije (horizontalne, vertikalne, kose - pomoću limesa),
- intervala rasta i pada, stacionarnih točaka i prirode ekstrema u njima,
- intervala konveksnosti i konkavnosti funkcije

■ **Primjer 9.8** Analizirajte tok i skicirajte graf funkcije $f(x) = xe^{-x}$.

Rješenje: Domena funkcije je čitav skup $\mathbb{R}$. Funkcija nije niti parna niti neparna. Nultočka funkcije podudara se s presjekom grafa s y-osi, to je ishodište $(0,0)$. Nema konačnih rubova domene, pa nema vertikalnih asimptota. Tražimo horizontalne

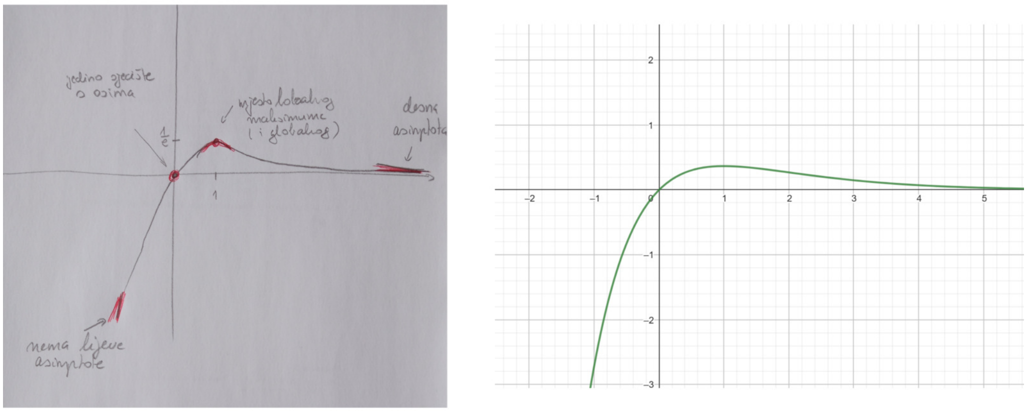
$$\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = (L'H) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0, \ \lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = (-\infty e^{\infty}) = -\infty$$

U računu je oznaka (L'H) koja označava primjenu tzv. L'Hospitalovog pravila za limese. To pravilo kaže da je za neodređene oblike $\frac{0}{0}$ *i* $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dakle, možemo derivirati funkciju u brojniku i funkciju u nazivniku. Potom pogledamo je li uvrštavanjem granice oblik postao određen. Ako nije, možemo L'H pravilo primijeniti ponovno.

Iz dobivenog zaključujemo da je pravac $x = 0$ desna horizontalna asimptota grafa. Na kraju tražimo lokalne ekstreme i intervale rasta i pada funkcije kako bismo kompletirali podatke za crtanje grafa. Derivacija je $f'(x) = (1-x)e^{-x}$. Stacionarne točke su njene nultočke. Rješenje $(1-x)e^{-x} = 0$ je $x = 1$ (eksponencijalni dio nema nultočku). Za $x < 1$ je $f'(x) > 0$ pa zaključujemo da za $x \in \langle -\infty, 1\rangle$ funkcija raste. Za $x > 1$ je $f'(x) < 0$, stoga za $x \in \langle 1, \infty\rangle$ funkcija pada. Zaključujemo da za $x = 1$ ima lokalni maksimum $f(1) = \frac{1}{e}$. Na temelju svih podataka skiciramo graf funkcije.

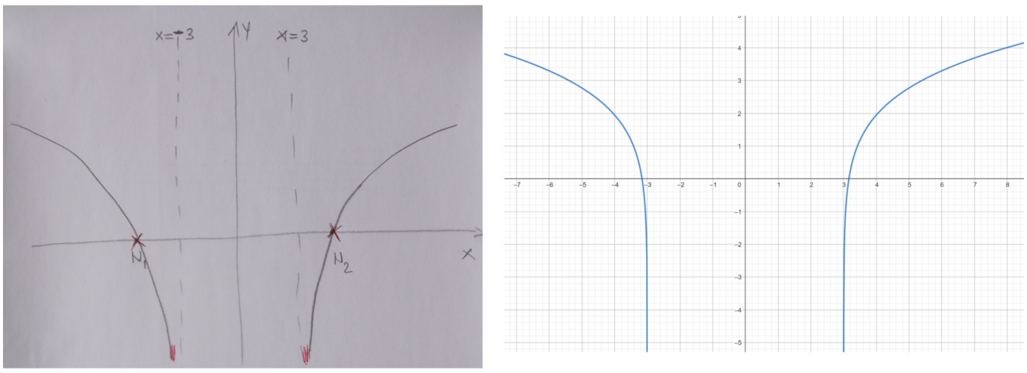


Slika 9.4: Skica i slika grafa funkcije $f(x) = xe^{-x}$

■

■ **Primjer 9.9** Analizirajte tok i skicirajte graf funkcije $f(x) = \ln(x^2 - 9)$.

Rješenje: Domena funkcije je $\langle -\infty, -3\rangle \cup \langle 3, \infty\rangle$. Funkcija je parna pa joj je graf simetričan obzirom na y-os. Nultočke funkcije su $N_1(-\sqrt{10}, 0)$ i $N_2(\sqrt{10}, 0)$. Imamo konačne rubove domene, tj. vertikalne asimptote $x = -3, x = 3$ te je $\lim_{x \to -3_-} f(x) = \lim_{x \to 3_+} f(x) = -\infty$. Kosih ni horizontalnih asimptota nema. Nema niti stacionarnih točaka jer nultočka prve derivacije $x = 0$ nije u domeni. Funkcija raste za $x \in \langle 3, \infty\rangle$, a drugdje pada. Iz svega dobivenog skiciramo graf funkcije.



Slika 9.5: Skica i slika grafa funkcije $f(x) = \ln(x^2 - 9)$

■

9.4 Primjene derivacije funkcije u ekonomiji

Derivacija f' funkcije f zadaje trenutnu veličinu promjene zavisne varijable $y = f(x)$ u odnosu na nezavisnu varijablu x. Vidimo to iz činjenice da je tangenta na graf u nekoj točki priljubljena uz graf funkcije u neposrednoj blizini te točke. Stoga se koeficijent smjera tangente može koristiti kao procjena promjene funkcije f u sljedećoj jedinici, tj. $f'(x_0) \approx f(x_0 + 1) - f(x_0)$. Ta činjenica omogućuje da u ekonomiji analiziramo kako jedinično povećanje npr. količine proizvodnje utječe na ukupni trošak ili prihod proizvodnje.

Vježba 9.6 Predviđa se da će naklada lokalnih novina u ovisnosti o vremenu t (u mjesecima) od početka izlaženja biti $N(t) = 100t^2 + 400t + 5000$ komada.

1. Kolika je početna naklada? 5000 kom
2. Za koliko će se naklada povećati u drugom mjesecu prodaje? Procijenite pa odredite točnu vrijednost. procjena $N'(1) = 600$ kom, $N(2) - N(1) = 700$

9.4.1 Granične veličine

U ekonomici je od značaja praćenje brzine promjene funkcija: troškova, ponude, potražnje i slično. Ekonomisti brzinu promjene veličina nazivaju imenom graničnost (marginalnost). Brzinu promjene funkcije daje derivacija funkcije pa pojam, primjerice, graničnog troška podrazumijeva derivaciju pripadne funkcije ukupnog troška.

Vježba 9.7 Odredimo granični trošak za zadanu funkciju ukupnog troška $T(x) = 250 + 12x$.
$T'(x) = 12$

■ **Primjer 9.10** Neka su ukupni troškovi proizvodnje (izraženi eurima) x tisuća litara piva zadani funkcijom: $T(x) = 5x^2 + 80x + 4000$. Odredimo funkciju graničnog troška te granični trošak proizvodnje 5000 litara piva (interpretirajmo dobiveni rezultat). Odredimo i optimalnu razinu proizvodnje za koju je trošak proizvodnje minimalan.

Rješenje: Funkcija graničnog troška je $T'(x) = 10x + 80$. Onda je $T'(5) = 140$ eura. To je trošak proizvodnje sljedeće (6.) tisuće L piva. Za nalaženje optimalne razine proizvodnje riješimo jednadžbu $T'(x) = 0$. Dobivamo $x = 8$ (tisuća litara piva). Budući da je trošak zadan kvadratnom funkcijom, znamo da je dobivena razina proizvodnje za koju funkcija troška ima minimum. Kad to ne bismo znali, trebalo bi ispitati prirodu dobivene stacionarne točke ili praćenjem predznaka prve derivacije ili preko predznaka druge derivacije. Primijetite da je ovdje $T''(x) = 10 > 0$ za sve x pa onda i za $x = 8$.

■

9.4.2 Osnovni princip granične analize

Neka su $D(x), P(x), T(x)$ redom funkcije dobiti, prihoda i ukupnog troška u ovisnosti o količini proizvodnje x. Funkcija dobiti $D(x)$ postiže maksimum za onu količinu proizvodnje x_0 za koju vrijedi:

1. $P'(x_0) = T'(x_0)$, tj. granični prihod i granični trošak rastu jednako brzo (ekvivalentno zahtjevu da je $D'(x_0) = 0$) i
2. $T''(x_0) > P''(x_0)$ (zahtjev da je $D''(x_0) < 0$).

Drugi je zahtjev ekvivalentan činjenici da granični trošak u sljedećoj jedinici **raste brže** od graničnog prihoda te će shodno tome dobit početi padati.

Vježba 9.8 Ovisnost cijene o broju prodanih proizvoda je $c(x) = 12 - 2\ln x$ eura. Ako je trošak proizvodnje 3 eura po komadu, koja će cijena dati maksimalnu dobit? 5 eura

9.4.3 Pojam elastičnosti funkcije

Elastičnost neke zavisne ekonomske veličine je sposobnost da intenzivno reagira na promjenu nezavisne veličine o kojoj ovisi. Primjerice, promatramo li količinu potražnje kao funkciju cijene proizvoda, elastičnost funkcije potražnje mjeri osjetljivost količine potražnje na cijenu. Ako s x označimo cijenu proizvoda (u eurima), a s $t(x)$ količinu potražnje (u komadima), elastičnost potražnje za cijenu x definira se kao:

$$E(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\frac{t(x+\triangle x)-t(x)}{t(x)}}{\frac{\triangle x}{x}}. \tag{9.6}$$

Vidimo, koeficijent elastičnosti je omjer relativne promjene potražnje i relativne promjene cijene. Sredimo li izraz, dobivamo

$$E(x) = \frac{x}{t(x)}t'(x). \tag{9.7}$$

Ovisno o vrijednosti $E(x)$ funkcija $t(x)$ je

1. neelastična ako je $|E(x)| < 1$
2. elastična ako je $|E(x)| > 1$
3. jedinično-elastična ako je $|E(x)| = 1$

■ **Primjer 9.11** Zadana je funkcija količine (u stotinama komada) potražnje $t(x) = \frac{1}{x-1}$ u ovisnosti o cijeni proizvoda x zadanoj u stotinama eura. Kolika se količina proizvoda traži ako je cijena proizvoda 200 eura? Odredimo koeficijent elastičnosti količine potražnje na nivou cijene proizvoda od 300 eura.

Rješenje: Za cijenu od 200 eura je $x = 2$, a potražnja je $t(2) = 1$, tj. 100 komada. Kako bi odredili koeficijent elastičnosti za $x = 3$, prvo odredimo funkciju elastičnosti potražnje

$$E(x) = \frac{x}{t(x)}t'(x) = \frac{x}{\frac{1}{x-1}}\left(\frac{1}{x-1}\right)' = x(x-1)\frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{-x}{x-1}.$$

Sada je $E(3) = -\frac{3}{2} = -1.5$ Dakle, funkcija potražnje je na ovom nivou cijene elastična. Dobiveni rezultat interpretiramo ovako: povećanje cijene za 1% na nivou cijene od 300 eura ($x = 3$) rezultiralo bi smanjenjem (negativan predznak) potražnje za 1.5%.

■

■ **Primjer 9.12** Zadana je funkcija ukupnih troškova proizvodnje $T(x) = 0.5x^2 + x + 600$ eura u ovisnosti o količini proizvoda x (broj komada). Odredite koeficijent elastičnosti varijabilnih troškova i komentirajte elastičnost na nivou $x = 10$ komada proizvoda.

Rješenje: Funkcija varijabilnih troškova je $T_V(x) = 0.5x^2 + x$. Njezina je funkcija elastičnosti

$$E(x) = \frac{x}{T_V(x)}T_V'(x) = \frac{x+1}{0.5x+1}.$$

Za $x = 10$ je $E(10) = 1.83$ pa zaključujemo da na su razini proizvodnje 10 proizvoda varijabilni troškovi elastični. Povećanje proizvodnje za 1% rezultira povećanjem varijabilnih troškova za 1.83%. Odavde možemo zaključiti da povećanje proizvodnje za 1 komad (povećanje od 10% na razini proizvodnje 10 proizvoda) rezultira povećanjem varijabilnih troškova proizvodnje za 18.3%.

■

Vježba 9.9 Zadana je funkcija količine potražnje $t(x) = 500 - 2x$ u ovisnosti o cijeni x danoj u eurima. Odredimo za koje cijene je potražnja elastična, neelastična te gdje je jedinične elastičnosti.

elastična za $x > 125$ eura, neelastična za $x < 125$ eura, za $x = 125$ eura jedinično-elastična

9.5 Zadatci za vježbanje

1. Neka su ukupni troškovi (u eurima) proizvodnje x jedinica jednog proizvoda jednaki

$$T(x) = 3x^2 + x + 500.$$

   (a) Koristeći funkciju graničnih troškova procijenite trošak proizvodnje 41. jedinice.
   (b) Izračunajte stvarni trošak proizvodnje 41. jedinice.

2. Količinu prodaje novog proizvoda u ovisnosti o vremenu t danom u mjesecima od početka prodaje daje funkcija $S(t) = 100 - \frac{100}{t}$. Odredite brzinu promjene količine prodaje nakon mjesec dana i nakon 10 mjeseci. U kojem vremenu količina prodaje raste brže?
3. Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = 4x - x^2$ u točki s apscisom 1.
4. Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = \ln x$ u mjestu presjeka s x-osi.
5. U kojoj točki parabole $y = x^2 - x + 1$ je tangenta na parabolu paralelna pravcu $y = x$?
6. Odredite lokalne ekstreme funkcija:
   (a) $f(x) = x^3 + x^2 - 2$.
   (b) $f(x) = x^3 - 3x$.
7. Odredite interval na kome funkcija $f(x) = -3\ln(x^2 + 3) + 1$ raste.
8. Koja od funkcija $f(x) = \sqrt{x}$ ili $g(x) = \sqrt[3]{x}$ raste brže u točki (1,1)?
9. Odredite ima li funkcija $f(x) = x^3$ lokalnih ekstrema.
10. Zadana je funkcija $f(x) = x^2 + 3x - 4$. Odredite interval na kome funkcija raste te točku u kojoj ima lokalni ekstrem i prirodu ekstrema.
11. Prihod mlina (u stotinama eura) od prodaje x tona brašna opisuje funkcija $P(x) = 6x^2 - x^3$. Odredite za koju količinu brašna je prihod mlina najveći.
12. Odredite drugu derivaciju funkcija:
   (a) $f(x) = x^3 - x^2$
   (b) $f(x) = \ln(1 + x)$
   (c) $f(x) = x \ln x$
13. U trošku proizvodnje x jedinica nekog proizvoda sudjeluju sljedeći troškovi
   - fiksan trošak od 1200 eura dnevno za plaće radnika
   - trošak proizvodnje od 1.2 eura za svaku proizvedenu jedinicu
   - trošak organizacije prodaje proizvoda u iznosu $\frac{100}{x^2}$.

   Izrazite ukupni trošak kao funkciju od x i odredite količinu proizvodnje za koju je on minimalan.
14. Prihod od prodaje x tona određenog proizvoda zadan je funkcijom

$$P(x) = 5 - \frac{48}{x} - 3x^2.$$

   (a) Odredite količinu proizvodnje za koju je prihod maksimalan.
   (b) Koja količina proizvodnje rezultira padom prihoda?

15. Za potražnju $t(x) = 10\,000 - 500x$ odredite i komentirajte elastičnost na nivoima cijene x od 4,10 i 16 eura.
16. Za funkciju potražnje $t(x) = \sqrt{144 - 2x}$ odredite i komentirajte elastičnost količine potražnje na razini cijene $x = 50$ eura.
17. Provjerite je li parna funkcija $f(x) = 2x^2 - x^4$. Na temelju slike grafa dobivene u Geogebri odredite:

(a) Domenu i sliku funkcije.
(b) Koliko lokalnih ekstrema ima funkcija?
(c) Je li neki od ekstrema globalni?
(d) Za koji x iz segmenta $[-0.5, 0.7]$ funkcija ima maksimum?
(e) Za koji x iz segmenta $[0.5, 1.5]$ funkcija ima minimum, a za koji x funkcija ima maksimum?

18. Zadana je funkcija $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$. Uz pomoć derivacije funkcije odredite:
    (a) gdje funkcija ima lokalni minimum?
    (b) interval na kojem funkcija pada.
    (c) za koji $x \in [-1, 3]$ funkcija ima maksimalnu vrijednost?
    (d) za koji $x \in [-1, 4]$ je graf funkcije najstrmiji? Koliki je nagib tangente na graf u toj točki?

Rješenja zadataka

1. (a) $T'(40) = 241$ eura
   (b) $T(41) - T(40) = 244$ eura
2. $S'(1) = 100, S'(10) = 1$ kom
3. $y = 2x + 1$
4. $y = x - 1$
5. $f'(x) = 1$ daje $x = 1$, T(1,1)
6. (a) min za $x = 0$, max za $x = -2/3$
   (b) min za $x = 1$, max za $x = -1$
7. $x \in \langle -\infty, 0 \rangle$
8. $f'(1) > g'(1)$
9. nema lokalnih ekstrema
10. f raste za $x \in \langle -\frac{3}{2}, \infty \rangle$, ima lok. minimum u $T(-\frac{3}{2}, -\frac{19}{4})$
11. stac. točke $x_1 = 0, x_2 = 4$, x_2 je lok. max, $P(4) = 32$ stotine eura
12. (a) $f''(x) = 6x - 2$
    (b) $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$
    (c) $f''(x) = \frac{1}{x}$
13. $T(x) = 1200 + 1.2x + \frac{100}{x^2}$, trošak je minimalan za $x = 5.5$ jedinica
14. a) $x = 2$
    b) $x > 2$
15. $E(4) = -0.25$ (neelastičnost), $E(1) = 1$ (jedinična elastičnost), $E(16) = -4$ (elastičnost)
16. $E(50) = -1.14$
17. funkcija je parna
    (a) $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R}, \mathscr{R}(f) = \langle -\infty, 1]$
    (b) ima tri lokalna ekstrema
    (c) da, dva ekstrema su globalna
    (d) Za koji x iz segmenta $[-0.5, 0.7]$ funkcija ima maksimum? za $x = 0.7$ ima maksimum
    (e) maksimum za $x = 1$, minimum za $x = 1.5$
18. (a) funkcija ima lokalni minimum u ishodištu

(b) funkcija pada za $x \in \langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 4, +\infty \rangle$
(c) funkcija ima maksimalnu vrijednost za $x = 3$
(d) graf funkcije je najstrmiji za $x = -1$, nagib tangente na graf u toj točki je $a = -5$

Treći dio

10 Funkcije više varijabli 120
10.1 Primjeri funkcije dvije varijable
10.2 Koordinatni sustav u prostoru
10.3 Pojam parcijalne derivacije
10.4 Lokalni ekstremi funkcije dvije varijable
10.5 Zadatci za vježbanje

11 Uvod u integralni račun 130
11.1 Pojam neodređenog integrala
11.2 Zadatci za vježbanje

12 Primjene integralnog računa 137
12.1 Pojam određenog integrala
12.2 Primjene integralnog računa
12.3 Zadatci za vježbanje

A Elementi linearnog programiranja . . . 147
A.1 Grafičko rješavanje sustava linearnih nejednadžbi
A.2 Grafičko rješavanje problema linearnog programiranja

B Pregled formula 155

Literatura 162

Kazalo 162

10. Funkcije više varijabli

10.1 Primjeri funkcije dvije varijable

■ **Primjer 10.1** Izrazimo li površinu pravokutnika kao funkciju njegove duljine x i širine y, dobivamo

$$P(x,y) = x \cdot y.$$

To je primjer funkcije dviju varijabli. ■

> **Definicija 10.1.1 — Funkcija dvije varijable.** Funkcija $f : \mathscr{D} \to \mathscr{K}$ je **funkcija dviju varijabli** ako je $\mathscr{D} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Dakle, funkcija dviju varijabli f zadaje pravilo po kojem uređenom paru $(x,y) \in \mathscr{D}$ pridružujemo jedinstvenu vrijednost $z = f(x,y) \in \mathscr{K}$.

■ **Primjer 10.2** Zadana je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kao $f(x,y) = 2x + 3y + 4$. Izračunajmo $f(0,1)$, $f(1,0)$, i $f(1,-2)$.

$$\begin{aligned} f(0,1) &= 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 4 = 7, \\ f(1,0) &= 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 4 = 6, \\ f(1,-2) &= 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 4 = 0. \end{aligned}$$

■

Vježba 10.1 Proizvođač proizvodi kalkulatore dva tipa: grafičke i obične. Grafički kalkulatori prodaju se po cijeni od 54 eura, obični po 22 eura po komadu. Odredimo funkciju prihoda u ovisnosti o broju prodanih kalkulatora pojedine vrste. $P(x,y) = 54x + 22y$

■ **Primjer 10.3** Proizvodnja Q je funkcija uloženog kapitala K i veličine radne snage L (izražene u broju radnih sati). **Cobb-Douglasova funkcija proizvodnje (produktivnosti)** Q je funkcija sljedećeg izgleda

$$Q(K,L) = aK^{\alpha}L^{\beta}, \tag{10.1}$$

gdje su $0 < \alpha, \beta < 1$ i $a > 0$ realni brojevi, fiksni za određeni model proizvodnje. ■

■ **Primjer 10.4** Kvocijent inteligencije mjeri se funkcijom

$$I(m,s) = \frac{100m}{s},$$

gdje je s starost osobe (izražena u godinama), a m njezina mentalna zrelost (mjere je testovi inteligencije). Izračunajmo $I(16,17)$.

Rješenje: Uvrstimo podatke i dobijemo:

$$I(16,17) = \frac{1600}{17} \approx 94.11.$$

■

10.2 Koordinatni sustav u prostoru

Koordinate se u trodimenzionalni prostor postavljaju uvođenjem triju međusobno okomitih **koordinatnih osi** (pravaca) x,y i z. Čitav trodimenzionalni prostor opisan je s

$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) : x,y,z \in \mathbb{R}\}. \tag{10.2}$$

Svakoj točki u ravnini pridružena je uređena trojka (x,y,z) koordinata. Obratno, svakoj uređenoj trojci realnih brojeva pridružena je jedinstvena točka u $\mathbb{R}^3$. Parovi koordinatnih osi xy, xz i yz određuju **koordinatne ravnine**. **Prirodna domena** funkcije dviju varijabli f je

$$\mathscr{D}(f) = \{(x,y) : f(x,y) \text{ je definirano}\}. \tag{10.3}$$

Slika funkcije f je

$$\mathscr{R}(f) = \{z : z = f(x,y), (x,y) \in \mathscr{D}(f)\}. \tag{10.4}$$

Graf funkcije dviju varijabli f je skup

$$\Gamma_f = \{(x,y,f(x,y)) : (x,y) \in \mathscr{D}(f)\}. \tag{10.5}$$

10.2.1 Graf funkcije dviju varijabli

Graf funkcije dviju varijabli f je ploha u prostoru. Grafove funkcija možemo skicirati uz pomoć alata Geogebra 3D.

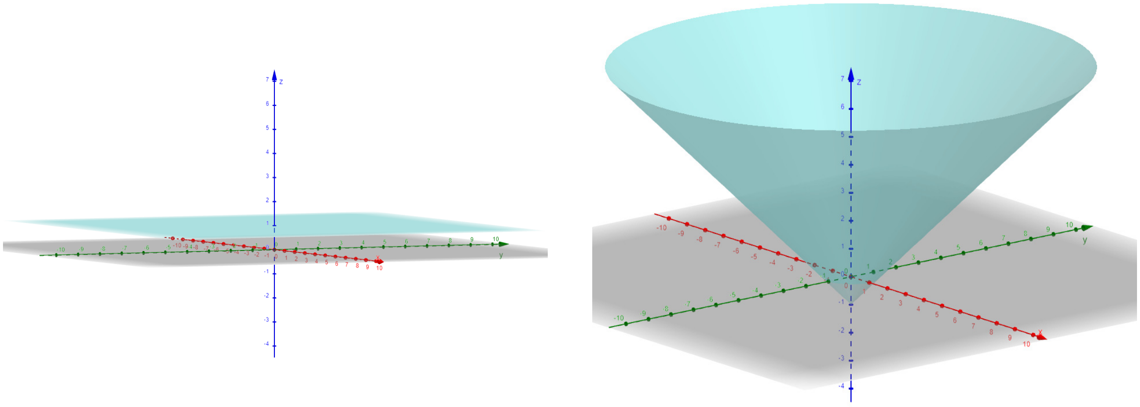
■ **Primjer 10.5** Skicirajmo u prostoru grafove funkcija:

1. $f(x,y) = 1$
   Graf ove funkcije je skup svih točaka (x,y,z) prostora za koje je $z = 1$, tj. skup svih točaka $(x,y,1)$ pri čemu su x, y proizvoljni realni brojevi. Taj skup čini ravninu paralelnu s xy ravninom i smještenu na "visini" $z = 1$ (prva ploha na slici 10.1). Ta ravnina je, naravno, neomeđena.
2. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - 1$.
   Pišemo $z = \sqrt{x^2+y^2} - 1$, odnosno $(z+1)^2 = x^2+y^2$. Za fiksnu vrijednost $z \geq -1$, jednadžba zadaje kružnicu radijusa $z+1$. Dakle, presjeci tražene plohe s ravninama paralelnima xy ravnini jesu kružnice. Ploha izgleda kao izokrenuti plašt stošca s vrhom u točki $(0,0,-1)$ (druga ploha na slici 10.1).

■

Vježba 10.2 Pogledajte sami uz pomoć Geogebra 3D alata grafove funkcija:

1. $f(x,y) = x^3 - y^3 + 6xy$
2. $g(x,y) = e^{x^2y-3y}$
3. $h(x,y) = e^{x^2} - e^{y^2}$



Slika 10.1: Grafovi ploha $z = 1$ i $z = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$

10.3 Pojam parcijalne derivacije

Ako u funkciji dviju varijabli jednu varijablu držimo konstantnom, možemo promatrati promjenu funkcije u ovisnosti o promjeni druge varijable. Dakle, možemo derivirati funkciju po jednoj od varijabli držeći drugu varijablu konstantnom. Takvu derivaciju zovemo parcijalnom. Kod parcijalnih derivacija koristi se oznaka ∂ koju čitamo "parcijalno".

Definicija 10.3.1 — Parcijalna derivacija. Neka je f funkcija dviju varijabli. **Parcijalna derivacija** funkcije f po varijabli x definira se

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}.$$

Parcijalna derivacija funkcije f po varijabli y je

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}. \tag{10.6}$$

Parcijalnu derivaciju funkcije $z = f(x,y)$ po x pisat ćemo $f'_x(x,y)$, a po y kao $f'_y(x,y)$

■ **Primjer 10.6** Odredimo parcijalne derivacije funkcije $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ po varijablama x i y.

Rješenje: Kad računamo parcijalnu derivaciju funkcije f po varijabli x, varijablu y tretiramo kako bismo tretirali bilo koju konstantu (broj):

$$f'_x(x,y) = (x^2)' + (x)'y + 0 = 2x + y + 0 = 2x + y.$$

Pri računanju $f'_y(x,y)$ deriviramo f po y, a x smatramo konstantom:

$$f'_y(x,y) = 0 + x(y)' + (y^2)' = x + 2y.$$

■

Vježba 10.3 Odredite parcijalne derivacije prvog reda funkcija dvije varijable:

1. $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + 3y^2$ — $f'_x(x,y) = 4x + 2y, f'_y(x,y) = 2x + 6y$
2. $f(x,y) = x \ln y$ — $f'_x(x,y) = \ln y, f'_y(x,y) = \frac{x}{y}$
3. $f(x,y) = x \ln y^2$ — $f'_x(x,y) = \ln y^2, f'_y(x,y) = \frac{2x}{y}$

4. $f(x,y) = e^{xy}$ $f'_x(x,y) = ye^{xy}, f'_y(x,y) = xe^{xy}$
5. $f(x,y) = xe^y + ye^x$ $f'_x(x,y) = e^y + ye^x, f'_(x,y) = xe^y + e^x$
6. $f(x,y) = \sqrt{xy}$ $f'_x(x,y) = \frac{y}{2\sqrt{xy}}, f'_y(x,y) = \frac{x}{2\sqrt{xy}}$
7. $f(x,y) = (x^2+xy+y)^5$ $f'_x(x,y) = 5(x^2+xy+y)^4(2x+y), f'_y(x,y) = 5(x^2+xy+y)^4(x+1)$
8. $f(x,y) = \ln(x^3+3xy)$ $f'_x(x,y) = \frac{3x^2+y}{x^3+3xy}, \quad f'_x(x,y) = \frac{3x}{x^3+3xy}$

Parcijalne derivacije drugog reda

Za funkciju $f(x,y)$, postoje dvije derivacije prvog reda:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x(x,y) \text{ i } \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y(x,y). \tag{10.7}$$

Nadalje, ukupno su četiri derivacije drugog reda:

$$\frac{\partial f_x}{\partial x} = f''_{xx}(x,y), \; \frac{\partial f_y}{\partial x} = f''_{xy}(x,y), \; \frac{\partial f_x}{\partial y} = f''_{yx}(x,y) \text{ i } \frac{\partial f_y}{\partial y} = f''_{yy}(x,y). \tag{10.8}$$

Vježba 10.4 Za funkciju $f(x,y) = x^3e^{y^2}$ odredite vrijednosti svih parcijalnih derivacija prvog i drugog reda u točki $(1,0)$.
$f'_x(1,0) = 3, f'_y(1,0) = 0, f''_{xx}(1,0) = 6, f''_{yx}(1,0) = 0, f''_{yy}(1,0) = 2$

■ **Primjer 10.7** Odredimo sve parcijalne derivacije drugog reda za $f(x,y) = x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - y^3$.

Rješenje: Prvo imamo $f'_x(x,y) = 3x^2 - 4xy + 2y^2, f'_y(x,y) = -2x^2 + 4xy - 3y^2$. Potom je

$$f''_{xx}(x,y) = 6x + 4y, \;\; f''_{yx}(x,y) = -4x + 4y, \;\; f''_{xy}(x,y) = -4x + 4y, \;\; f''_{yy}(x,y) = 4x - 6y.$$

Sada je: $f'_x(1,0) = 3$, $f'_y(1,0) = f''_{xy}(1,0) = f'_{yy}(1,0) = 0$, $f''_{xx}(1,0) = 6$.

■

Općenito vrijedi: ako su $f''_{xy}(x,y)$ i $f''_{yx}(x,y)$ neprekidne funkcije na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}^2$, onda su one jednake, tj. $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$, za sve $(x,y) \in I$.

Vježba 10.5 Funkcija zadovoljava Laplaceovu jednadžbu ako vrijedi $f''_{xx}(x,y) = f''_{yy}(x,y)$. Provjerite zadovoljava li navedeni identitet funkcija $f(x,y) = x^2 - y^2$. ne zadovoljava

Vježba 10.6 Za funkciju $f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ vrijedi $f''_{xx}(x,y) + f''_{yy}(x,y) = 0$. Provjerite.

10.3.1 Geometrijsko značenje parcijalnih derivacija

Neka je zadana ploha $z = f(x,y)$ u prostoru. Uzmimo točku $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ na plohi. Ima puno pravaca u prostoru koji su tangente na plohu u toj točki. Svi ti pravci leže u jednoj ravnini. Nju zovemo **tangencijalna ravnina**. Vrijednost $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)$ je koeficijent smjera točno one tangente iz tangencijalne ravnine koja se nalazi u presjeku plohe $z = f(x,y)$ i ravnine $y = y_0$ (ravnina paralelna s xz ravninom). Možemo reći kako parcijalna derivacija funkcije $z = f(x,y)$ po varijabli x mjeri "brzinu promjene funkcije u smjeru x-osi". Slično, vrijednost $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)$ je jednaka koeficijentu smjera one tangente iz T koja je presjek plohe $z = f(x,y)$ i ravnine $x = x_0$ (ravnina paralelna s ravninom yz). Parcijalna derivacija funkcije $z = f(x,y)$ po varijabli y mjeri "brzinu promjene funkcije u smjeru y-osi".
Vrijednost parcijalnih derivacija daje informaciju o brzini promjene funkcije pri povećanju pojedine varijable za 1. Tako $f'_x(x_0,y_0)$ daje procjenu razlike $f(x_0+1,y_0) - f(x_0,y_0)$, a vrijednost $f'_y(x_0,y_0)$ daje procjenu razlike $f(x_0,y_0+1) - f(x_0,y_0)$.

■ **Primjer 10.8** Kad je zaposleno x iskusnih i y neiskusnih radnika, proizvest će se $Q(x,y) = 5x^2 + 7xy$ komada proizvoda. Ako trenutno radi 10 iskusnih i 5 neiskusnih radnika kojom brzinom će se mijenjati količina proizvodnje ako odlučimo zaposliti još jednog iskusnog radnika, a broj neiskusnih ostane isti, a kako ukoliko zaposlimo još jednog neiskusnog radnika, a broj iskusnih radnika ostane isti?

Rješenje: Odgovor na pitanje kako se količina proizvodnje mijenja pri promjeni jedne od varijabli dok drugu smatramo fiksnom daju parcijalne derivacije. Zato računamo:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = Q'_x(x,y) = 10x + 7y, \quad \frac{\partial Q}{\partial xy} = Q'_y(x,y) = 0 + 7x.$$

Za $x = 10, y = 5$ je $Q'_x(10,5) = 135$, a $Q'_y(10,5) = 70$. Zaključujemo da bi zapošljavanje još jednog iskusnog radnika vodilo povećanju proizvodnje za približno 135 proizvoda, a zapošljavanje još jednog neiskusnog radnika vodilo bi povećanju proizvodnje za približno 70 proizvoda, što je manje od prethodnog.

■

10.3.2 Marginalne produktivnosti rada i kapitala

Kako je već rečeno, produktivnost Q neke proizvodnje mjeri se brojem proizvoda i ona je funkcija uloženog kapitala K (izraženog u novcu)i veličine radne snage L (izražene u broju radnih sati). **Cobb-Douglasova funkcija produktivnosti** Q je funkcija

$$Q(K,L) = aK^{\alpha}L^{\beta}, \tag{10.9}$$

gdje su $0 < \alpha, \beta < 1$ i $a > 0$ realni brojevi, fiksni za određeni model proizvodnje. Parcijalnu derivaciju Q po K, $Q'_K(K,L)$ zovemo marginalna (granična) produktivnost kapitala, a parcijalnu derivaciju Q po L, $Q'_L(K,L)$ marginalna produktivnost rada.

■ **Primjer 10.9** Produktivnost nekog pogona zadana je s $Q(K,L) = 120K^{2/3}L^{1/3}$ gdje je K količina uloženog kapitala (u 1 000 eura), a L uloženi rad u broju radnih sati mjesečno. Odredite broj proizvoda koje pogon proizvede ako je u proizvodnju uloženo 125 000 eura i 1 331 radnih sati. Odredite i marginalnu produktivnost rada i marginalnu produktivnost kapitala na tom nivou proizvodnje.

Rješenje: Za $K = 125, L = 1\,331$ uvrštavanjem dobijemo da je $Q(125, 1\,331) = 33\,000$, što znači da na tom nivou proizvodnje pogon proizvede 33 000 proizvoda.
Marginalna produktivnost kapitala i rada daju informaciju o kretanju proizvodnje ukoliko se na danoj razini kapital ili broj radnih sati povećaju za jednu jedinicu. Prvo odredimo funkcije marginalne produktivnosti kapitala i rada

$$Q_K(K,L) = 120\frac{2}{3}K^{-1/3}L^{1/3} = 80K^{-1/3}L^{1/3}$$
$$Q_L(K,L) = 120K^{2/3}\frac{1}{3}L^{-2/3} = 40K^{2/3}L^{-2/3}.$$

Uvrštavanjem vrijednosti dobivamo $Q_K(125, 1\,331) = 176, Q_L(125, 1\,331) = 8.26$. Dobivene rezultate interpretiramo ovako: dodatna jedinica kapitala (1 000 eura) bi na nivou $K = 125, L = 1\,331$ rezultirala povećanjem proizvodnje za 176 komada, a dodatni sat rada povećanjem proizvodnje za 8.26 komada. Pri odlukama o povećanju ulaganja ili rada to treba uzeti u obzir.

■

Vježba 10.7 Zadana je funkcija $Q(K,L) = 10K^{0.2}L^{0.5}$. Odredite marginalnu produktivnost rada i marginalnu produktivnost kapitala na nivou ulaganja kapitala od 10 000 eura i 420 radnih sata pogona i vidite da na navedenom nivou povećanje broja radnih sati rezultira većom produktivnošću proizvodnje.

10.4 Lokalni ekstremi funkcije dvije varijable

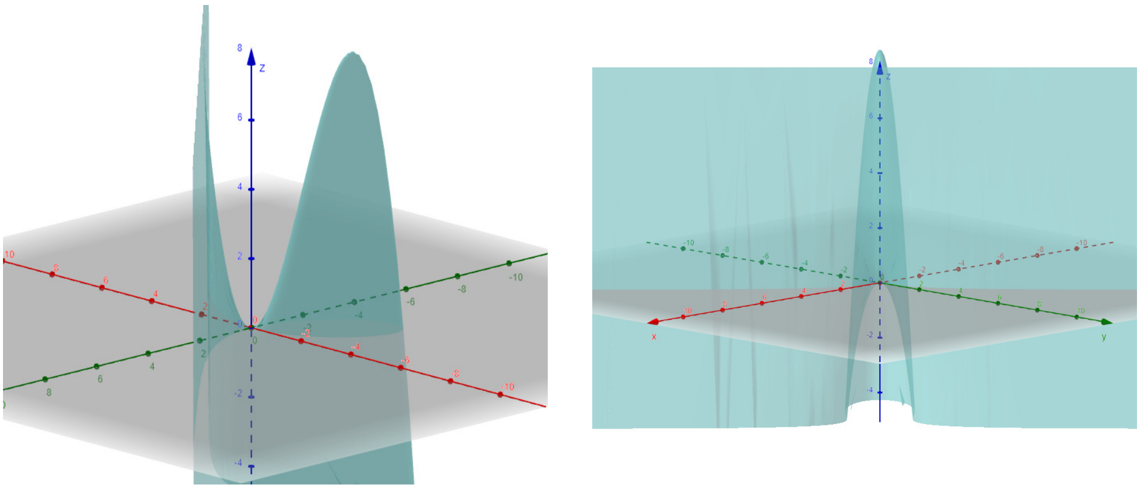
Važno je znati odrediti lokalne ekstreme funkcije dvije varijable.

Definicija 10.4.1 — Lokalni ekstremi funkcije. Kažemo da funkcija $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ima **lokalni ekstrem** (lokalni maksimum ili lokalni minimum) u točki (x_0,y_0) ako je $f(x_0,y_0)$ ekstremna (najveća ili najmanja) vrijednost funkcije f u neposrednoj okolini točke (x_0,y_0).

Kao i kod funkcije jedne varijable, lokalni ekstrem funkcije dvije varijable može se javiti jedino u stacionarnoj točki. Točka (x_0,y_0) je **stacionarna točka** za funkciju $f(x,y)$ ako su vrijednosti parcijalnih derivacija funkcije f po varijabli x i po varijabli y u toj točki jednake 0:

$$f'_x(x_0,y_0)=0 \quad \text{i} \quad f'_y(x_0,y_0)=0. \tag{10.10}$$

Ovo je zahtjev da koeficijenti smjera tangenti na krivulje dobivene presjekom plohe $z=f(x,y)$ s ravninama $x=x_0$ i $y=y_0$ budu jednaki 0. Stacionarna točka ne mora biti i mjesto lokalnog ekstrema, može biti tzv. sedlasta točka. To je slučaj kad je priroda ekstrema u smjeru x-osi različita od onog u smjeru y-osi. Ploha je u okolini sedlaste točke doslovno oblika sedla: u smjeru jedne varijable funkcija ima lokalni minimum, a u smjeru druge lokalni maksimum (slika 10.2).



Slika 10.2: Pogled na sedlo iz dva smjera

Da bi se odredila priroda ekstrema u stacionarnoj točki određuje se vrijednost

$$D(x_0,y_0)=f''_{xx}(x_0,y_0)f''_{yy}(x_0,y_0)-\left[f''_{xy}(x_0,y_0)\right]^2. \tag{10.11}$$

Ako je $D(x_0,y_0)<0$, u $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ funkcija ima sedlo. Ako je $D(x_0,y_0)>0$, tada je $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ ekstrem i to: lokalni minimum ako je $f''_{xx}(x_0,y_0)>0$ ili lokalni maksimum ako je $f''_{xx}(x_0,y_0)<0$.

Vježba 10.8 Odredite stacionarne točke funkcije $f(x,y)=x^2+y^2$. točka $(0,0)$

■ **Primjer 10.10** Odredimo i klasificirajmo stacionarne točke funkcije

$$f(x,y)=x^3-y^3+6xy.$$

Rješenje: U računima trebamo sve parcijalne derivacije funkcije do uključivo drugog reda. Odredimo ih:

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 3x^2+6y, & f'_y(x,y) &= -3y^2+6x, \\ f''_{xx}(x,y) &= 6x, & f''_{xy}(x,y) &= 6, \\ f''_{yx}(x,y) &= 6, & f''_{yy}(x,y) &= -6y. \end{aligned}$$

Odredimo stacionarne točke. Tražimo x i y koji su rješenja (nelinearnog) sustava od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} 3x^2 + \ 6y &= 0 \\ 6x - 3y^2 &= 0. \end{aligned}$$

Iz druge jednadžbe je $x = \frac{y^2}{2}$. Uvrstimo li to u prvu jednadžbu, dobivamo

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{y^2}{2}\right)^2 + 6y &= 0, \\ 3\frac{y^4}{4} + 6y &= 0, \\ 3y^4 + 24y &= 0, \\ 3y(y^3+8) &= 0, \end{aligned}$$

Odavde je $y_1 = 0$, $y_2 = -2$, pa je $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Dobivamo stacionarne točke $(0,0)$ i $(2,-2)$.
Jesu li dobivene stacionarne točke i ekstremi?
Računamo vrijednost $D(x,y)$ u svakoj stacionarnoj točki:

$$\begin{aligned} D(0,0) &= f''_{xx}(0,0)f''_{yy}(0,0) - [f''_{xy}(0,0)]^2 = 0\cdot 0 - 36 < 0, \\ D(2,-2) &= f''_{xx}(2,-2)f''_{yy}(2,-2) - [f''_{xy}(2,-2)]^2 = 12\cdot 12 - 36 > 0. \end{aligned}$$

Točka $(0,0)$ je sedlasta točka, nije ekstrem.Točka $(2,-2)$ je točka lokalnog ekstrema. Budući je $f''_{xx}(2,-2) = 12 > 0$, funkcija u točki $(2,-2)$ ima lokalni minimum.

■

Vježba 10.9 Zadana je funkcija prihoda (u tisućama eura) proizvodnje $P(x,y)$ u ovisnosti o cijeni x (u eurima) i ulaganju u marketing y (u tisućama eura)

$$P(x,y) = 50x - x^2 - y^2 + 10y.$$

Odredimo za koje je parametre prihod proizvodnje maksimalan te koliko iznosi maksimalan prihod.

$P(25,5) = 650$ tisuća eura

■ **Primjer 10.11** Odredimo jednadžbu regresijskog pravca za tri točke: $(1,1)$, $(2,3)$ i $(4,3)$.

Rješenje: Neka je jednadžba regresijskog pravca $y = kx + l$. Označimo s d_1, d_2 i d_3 udaljenosti danih točaka od regresijskog pravca u smjeru y-osi. Za $x = 1$, pripadna y koordinata točke na pravcu jednaka je $y = k\cdot 1 + l = k + l$. Stoga je razlika y koordinata za prvu točku jednaka $d_1 = k + l - 1$. Slično bismo odredili d_2 i d_3. Dakle, imamo:

$$\begin{aligned} d_1 &= k + l - 1, \\ d_2 &= 2k + l - 2, \\ d_3 &= 4k + l - 3. \end{aligned}$$

Regresijski pravac tražimo prema metodi najmanjih kvadrata. Dakle, tražimo takve k i l da zbroj ${d_1}^2+{d_2}^2+{d_3}^2$ bude minimalan. Primijetite da nam nije važno jesu li vrijednosti d_i, $i=1,2,3$ pozitivne ili negativne jer ih kvadriramo. Stoga je svejedno uzima li se $d_1=k+l-1$ ili $d_1=1-(k+l)$. Slično je i za d_2 i d_3.
Tražimo da zbroj kvadrata udaljenosti d_1,d_2,d_3 bude najmanji mogući tj.

$$S={d_1}^2+{d_2}^2+{d_3}^2\to min.$$

Dakle, imamo problem određivanja minimuma funkcije dviju varijabli:

$$S(k,l)=(k+l-1)^2+(2k+l-2)^2+(4k+l-3)^2.$$

Odredimo parcijalne derivacije funkcije $S(k,l)$:

$$\begin{aligned}S'_k(k,l)&=2(k+l-1)+2(2k+l-2)\cdot 2+2(4k+l-3)\cdot 4=42k+14l-38,\\ S'_l(k,l)&=2(k+l-1)+2(2k+l-2)+2(4k+l-3)=14k+6l-14.\end{aligned}$$

Tražimo stacionarnu točku. Uvjet je $S_k(k,l)=S_l(k,l)=0$ pa rješavamo sustav

$$\begin{aligned}42k+14l&=38\\ 14k+\ \ 6l&=14.\end{aligned}$$

Rješenje sustava je $k=\frac{4}{7}, l=1$. Koordinate stacionarne točke su $(\frac{4}{7},1,\frac{3}{7})$. Parcijalne derivacije drugog reda su:

$$S''_{kk}(k,l)=42,\quad S''_{lk}(k,l)=S''_{kl}(k,l)=14,\quad S''_{ll}(k,l)=6.$$

Vidimo da su fiksne za svaku vrijednost k i l. Kako je $D(\frac{4}{7},1)=42\cdot 6-14^2>0$, dobivena točka je mjesto lokalnog ekstrema funkcije. Budući je $S''_{kk}(\frac{4}{7},1)=42>0$, zaključujemo da funkcija $S(k,l)$ ima u točki $(\frac{4}{7},1)$ lokalni minimum. Jednadžba regresijskog pravca je $y=\frac{4}{7}x+1$.

■

R Normalne jednadžbe koje smo koristili pri dobivanju jednadžbe regresijskog pravca dobivene su postupkom minimiziranja funkcije koja je jednaka zbroju kvadrata udaljenosti $d_i, i=1,\dots n$ od pravca svake od n točaka od regresijskog pravca (u smjeru y osi)

$$S={d_1}^2+\cdots+{d_n}^2.$$

10.5 Zadatci za vježbanje

1. Zadana je funkcija $f(x,y)=2x+3xy$. Izračunajte $f(0,1), f(1,0)$ i $f(1,-2)$.
2. Površina kože (u m^2) koja prekriva čovjekovo tijelo približno je dana funkcijom

$$P(m,h)=0.202m^{0.425}h^{0.725}$$

gdje je m masa čovjeka dana u kg, a h visina čovjeka dana u metrima. Odredite po ovoj formuli površinu kože na svom tijelu.

3. Odredite parcijalne derivacije prvog reda sljedećih funkcija:

(a) $f(x,y)=x^4y^2+9xy$

(b) $g(x,y) = \ln y - \ln x$

(c) $h(x,y) = y^2 - x^2 - 7xy$

(d) $i(x,y) = x^3 + 7xy^2 - 12x$

(e) $j(x,y) = x^3 + 2x^2 + 3e^y$

(f) $k(x,y) = e^{x+y}$

(g) $l(x,y) = e^{-y} + 3e^x$

(h) $m(x,y) = \ln(xy)$

(i) $n(x,y) = e^{\frac{x}{y}}$

(j) $o(x,y) = \ln\left(\frac{x}{y+1}\right)$

4. Stupanj zagađenja jezera dan je s:

$$P(x,y) = \ln x + \ln y + 3xy,$$

gdje je x količina (u mg) deterdženata, a y količina metalnih soli (u mg) u uzorku od 1L jezerske vode. Odredite i objasnite vrijednosti $P'_x(1,2)$, $P'_y(1,2)$. Povećanje kojeg onečišćivača rezultira manjim povećanjem stupnja zagađenja jezera?

5. Nuklearna elektrana uzima vodu iz rijeke za hlađenje reaktora i zagrijanu je ispušta u rijeku. Temperaturu ispuštene vode opisuje funkcija $T(x,y) = 2x + 5y + xy - 40$ (x je temperatura vode rijeke prije korištenja, a y je snaga elektrane u stotinama MW).
   (a) Odredite temperaturu vode koju elektrana ispušta ako je temperatura vode u rijeci $8°C$, a snaga elektrane 300 MW.
   (b) Odredite i interpretirajte $T'_x(9,5)$ i $T'_y(9,5)$.

6. Tjedna proizvodnja (izražena u jedinicama proizvoda) nekog proizvodnog pogona zadana je funkcijom

$$Q(x,y) = 1200x + 500y + x^2y - x^3 - y^2$$

za broj x uvježbanih radnika i broj y neuvježbanih radnika koji rade u tom pogonu. Trenutno u pogonu radi 30 uvježbanih i 60 neuvježbanih radnika. Procijenimo graničnom analizom promjenu proizvodnje do koje dolazi dođe li u pogon još jedan uvježbani radnik, a broj neuvježbanih ostane isti.

7. Odredite sve parcijalne derivacije drugog reda funkcije

$$f(x,y) = y^2e^x + x^2y^2.$$

8. Odredite parcijalne derivacije prvog reda funkcija:

   (a) $f(x,y) = 10x^2 + 2xy + y^2$
   (b) $f(x,y) = x\ln y^2$
   (c) $f(x,y) = x^2e^y + ye^x$
   (d) $f(x,y) = xe^{2y}$

9. Odredite sve parcijalne derivacije drugog reda funkcija iz prethodnog zadatka.

10. Dokažite da za funkciju $f(x,y) = (x+y)^2$ vrijedi $xf'_x(x,y) + yf'_y(x,y) = 2f(x,y)$.

11. Ratar po hektaru zasijane pšenice troši x stotina eura za rad i y stotina eura za gnojivo. Dobit (u stotinama eura) sa jednog hektara površine zasijane pšenicom opisuje funkcija

$$D(x,y) = 6x - x^2 - y^2 + 4y - 4.$$

Koliko novaca treba potrošiti na troškove rada i gnojiva da bi mu dobit bila maksimalna? Koliko iznosi maksimalna dobit?

12. Odredite lokalne ekstreme funkcije dviju varijabli

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$$

13. Društvena poželjnost neke djelatnosti zadana je funkcijom

$$D(x,y) = (16-6x)x - (y^2 - 4xy + 40), \ x \geq 0, y \geq 0$$

gdje je x mjera komercijalne dobrobiti (profit, nova radna mjesta), a y mjera ekološke nepoželjnosti (zagađenje, opterećenje prometnica). Djelatnost je poželjna ako je $D \geq 0$, a nepoželjna ako je $D < 0$.
   (a) Koje vrijednosti x i y maksimiziraju društvenu poželjnost djelatnosti?
   (b) Je li moguće da navedena djelatnost bude poželjna?

Rješenja zadataka

1. 0, 2, -4
3. (a) $f'_x = 4x^3y^2 + 9y, f'_y = 2x^4y + 9x$
   (b) $g'_x = -1/x, g'_y = 1/y$
   (c) $h'_x = -2x - 7y, h'_y = 2y - 7x$
   (d) $i'_x = 3x^2 + 7y^2 - 12, i'_y = 14xy$
   (e) $j'_x = 3x^2 + 4x, j'_y = 3e^y$
   (f) $k'_x = k'_y = e^{x+y}$
   (g) $l'_x = 3e^x, l'_y = -e^{-y}$
   (h) $m'_x = \frac{1}{x}, m'_y = \frac{1}{y}$
   (i) $n'_x = \frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}, n'_y = \frac{-x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}$
   (j) $o'_x = \frac{1}{x}, o'_y = -\frac{1}{y+1}$
4. $7, 7/2$
5. (a) 15°C
6. 2100 komada
7. $f'_x = y^2e^x + 2xy^2, \quad f'_y = 2ye^x + 2x^2y, \quad f''_{xx} = y^2e^x + 2y^2, \quad f''_{xy} = f''_{yx} = 2ye^x + 4xy, \quad f''_{yy} = 2e^x + 2x^2$
8. (a) $f'_x = 20x + 2y, f'_y = 2x + 2y$
   (b) $f'_x = \ln y^2, f'_y = \frac{2x}{y}$
   (c) $f'_x = 2xe^y + ye^y, f'_y = x^2e^y + e^x$
   (d) $f'_x = e^{2y}, f'_y = 2xe^{2y}$
11. $x = 3, y = 2, D(3,2) = 900$ eura
12. $(1,0)$ lokalni minimum -1
13. (a) $(4,8)$
   (b) ne, $D(4,8) < 0$

11. Uvod u integralni račun

11.1 Pojam neodređenog integrala

Zadanoj derivabilnoj funkciju f znamo odrediti derivaciju f'. Pitanje je obrata: za zadanu funkciju f odrediti funkciju F takvu da je $F' = f$.

■ **Primjer 11.1** Koja je funkcija derivirana da se dobije $f(x) = 2x$?

Rješenje: Svakako je $F(x) = x^2$. No, to nije jedino rješenje. Deriviranjem $x^2+1, x^2-5, x^2+e, \ldots$, također bismo dobili $2x$. Ukratko, za funkciju $F(x) = x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$ je $F'(x) = 2x$. Dakle, antiderivacija, odnosno primitivna funkcija neke funkcije nije jedna funkcija, već čitava familija funkcija (kako to pokazuje i Slika 11.1).

■

Definicija 11.1.1 — Antiderivacija. Funkciju $F : I \to \mathbb{R}$ za koju je $F' = f$ zovemo **primitivnom funkcijom ili antiderivacijom** funkcije $f : I \to \mathbb{R}$.

Pokazuje se da svaka realna funkcija neprekidna na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ ima primitivnu funkciju na I. Skup svih primitivnih funkcija dane neprekidne funkcije f na intervalu I nazivamo **neodređeni integral** funkcije f na intervalu I. Pišemo

$$\int f(x)dx = F(x) + c \tag{11.1}$$

i čitamo "integral ef od iks de iks jednak je ...". Znači

$$\int 2xdx = x^2 + c \text{ jer je } \left(x^2+c\right)' = 2x. \tag{11.2}$$

Vježba 11.1 Odredimo $\int e^x dx$. $e^x + c$

Određivanje integrala također je tehnika, kao i određivanje derivacije. Poznavanjem tablice osnovnih integrala i pravila i metoda integracije, moguće je odrediti integrale složenijih funkcija.

Tablica osnovnih integrala

f	k	$x^m,\ n \neq -1$	e^x	a^x	$\frac{1}{x}$
$\int f(x)dx$	$kx+c$	$\frac{x^{n+1}}{(n+1)}+c$	e^x+c	$\frac{a^x}{\ln a}+c$	$\ln\lvert x\rvert+c$

Pravila za nalaženje neodređenog integrala

Operacija integriranja je homogena i linearna što znači da vrijedi sljedeće:

- $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$
- $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Znajući vrijednosti neodređenih integrala te pravila za računanje neodređenih integrala, možemo odrediti integrale funkcija koje su linearne kombinacija gore spomenutih elementarnih funkcija.

■ **Primjer 11.2** Korištenjem tablice i pravila odredimo $\int (2x^5+8x^3-3x^2+5)dx$.

Rješenje:

$$\begin{aligned}\int (2x^5+8x^3-3x^2+5)dx &= 2\int x^5dx+8\int x^3dx-3\int x^2dx+5\int 1dx\\ &= 2\left(\frac{x^6}{6}+c_1\right)+8\left(\frac{x^4}{4}+c_2\right)-3\left(\frac{x^3}{3}+c_3\right)+5(x+c_4)+c_5\\ &= \frac{x^6}{3}+2x^4-x^3+5x+c\end{aligned}$$

Zbroj svih navedenih konstanti također je konstanta pa pišemo $+c$. Dobivena funkcija je antiderivacija početne podintegralne funkcije što možemo provjeriti deriviranjem. Zbilja,

$$\left(\frac{x^6}{3}+2x^4-x^3+5x+c\right)' = 2x^5+8x^3-3x^2+5.$$

■

Vježba 11.2 Korištenjem tablice i pravila odredite sljedeće integrale:

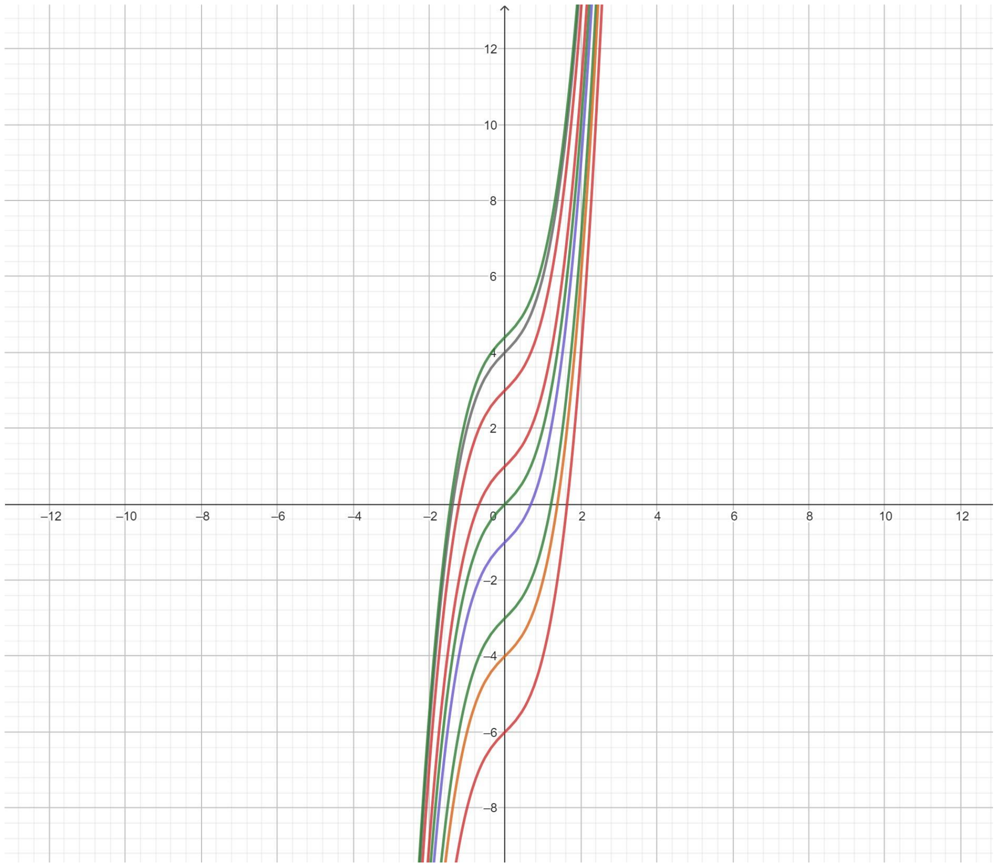
1. $\int \frac{x^3+2x-7}{x}dx$ $\frac{x^3}{3}+2x-7\ln\lvert x\rvert+c$
2. $\int (3e^{-5t}+\sqrt{t})dt$ $-\frac{3}{5}e^{-5t}+\frac{2}{3}\sqrt{t^3}+c$
3. $\int (3x^2+1)^2dx$ $\frac{9}{5}x^5+2x^3+x+c$

Vježba 11.3 Uz pomoć tablice odredimo neodređene integrale:

1. $\int x^3dx$ $\frac{x^4}{4}+c$
2. $\int \frac{5}{x}dx$ $5\ln\lvert x\rvert+c$
3. $\int \sqrt{x}dx$ $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+c$
4. $\int \frac{3}{x^2}dx$ $\frac{-3}{x}+c$
5. $\int 2^xdx$ $\frac{2^x}{\ln 2}+c$

■ **Primjer 11.3** Odredite funkciju čija tangenta ima nagib $3x^2+1$ i čiji graf prolazi točkom $(2,6)$.

Rješenje: Tražimo antiderivaciju funkcije $3x^2+1$, to je $F(x)=x^3+x+c$ i to je cijela obitelj funkcija (zbog c), grafovi nekoliko funkcija su na slici. Rješenje $F(x)$ zovemo **opće rješenje** jer je izraženo s neodređenom konstantom c.



Slika 11.1: Neke antiderivacije funkcije $f(x)=3x^2+1$

Budući da imamo dodatnu informaciju, tzv. **početni uvjet**, moći ćemo naći točno jedno rješenje. Tražimo da antiderivacija prolazi točkom $(2,6)$ tj. da bude $F(2)=6$. Sada iz $F(2)=2^3+2+c$ dobivamo $c=-4$. Tražena funkcija, tzv. **posebno rješenje** je $F(x)=x^3+x-4$.

■

■ **Primjer 11.4** Granični trošak (u eurima) neke proizvodnje opisan je funkcijom $T'(x)=x^2+3x$. Odredimo funkciju ukupnih troškova ako znamo da je fiksni trošak proizvodnje jednak 30 eura.

Rješenje: Antiderivacija (integral) funkcije graničnog troška daje opće rješenje funkcije troška:

$$T(x)=\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}+c.$$

Zadano je da je fiksni trošak 30 eura, tj. $T(0)=30$. Ovaj početni uvjet omogućuje određivanje c; u ovom slučaju je $c=30$. Dakle, posebno rješenje problema je

$$T(x)=\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}+30.$$

■

11.1.1 Tehnika integracije supstitucijom

Pravilo supstitucije moguće je primijeniti ukoliko u sastavu podintegralne funkcije vidimo dio funkcije i njegovu derivaciju (do na konstantu). Taj dio funkcije proglašavamo novom varijablom.

■ **Primjer 11.5** Odredite rješenja sljedećih problema i provjerite svoj rezultat:

1. $\int 9(x^2+3x+5)^8(2x+3)dx$

   Rješenje: U sastavu funkcije vidimo izraz x^2+3x+5 i njegovu (točnu) derivaciju $2x+3$. Stoga radimo supstituciju $u = x^2+3x+5$. Kad taj izraz deriviramo (svaku stranu po njezinoj varijabli), dobivamo $du = (2x+3)dx$. Poslije te smjene integral postaje vrlo jednostavan.

$$\int 9(x^2+3x+5)^8(2x+3)dx = \begin{bmatrix} u = x^2+3x+5 \\ du = (2x+3)dx \end{bmatrix}$$
$$= \int 9t^8 dt = t^9 + c = (x^2+3x+5)^9 + c.$$

2. $\int \frac{2x}{x^2-1}dx$

   Rješenje: Uvodimo supstituciju $u = x^2-1$, imamo $du = 2xdx$. Sada je:

$$\int \frac{2x}{x^2-1}dx = \int \frac{1}{x^2-1}2xdx = \begin{bmatrix} u = x^2-1 \\ du = 2xdx \end{bmatrix} = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + c = \ln|x^2-1| + c$$

■

Vježba 11.4

1. $\int x^3 e^{x^4+2}dx$ — $\frac{1}{4}e^{x^4+2}+c$
2. $\int \frac{3x}{x^2-1}dx$ — $\frac{3}{2}\ln\left|\frac{3x}{x^2-1}\right|+c$
3. $\int \frac{\ln 5x}{x}dx$ — $\frac{\ln^2 5x}{2}+c$
4. $\int xe^{x^2}dx$ — $\frac{e^{x^2}}{2}+c$
5. $\int x(x^2+1)^5dx$ — $\frac{1}{12}(x^2+1)^6+c$
6. $\int x^5e^{1-x^6}dx$ — $-\frac{1}{6}e^{1-x^6}+c$
7. $\int (3x^2-1)e^{x^3-x}dx$ — $e^{x^3-x}+c$
8. $\int 3t\sqrt{t^2-8}dt$ — $\sqrt{t^2-8}^3+c$
9. $\int \frac{\ln 2x}{x}dx$ — $\frac{(\ln 2x)^2}{2}+c$
10. $\int [(x-1)^6+3(x-1)^5+5]dx$ — $\frac{(x-1)^7}{7}+\frac{(x-1)^6}{2}+5x+c$

Primjenom tehnike supstitucije lako se dobiva proširena tablica osnovnih integrala:

f	$(ax+b)^m, n \neq -1$	e^{ax+b}	a^{dx+e}	$\frac{1}{ax+b}$
$\int f(x)dx$	$\frac{(ax+b)x^{n+1}}{a(n+1)}+c$	$\frac{e^{ax+b}}{a}+c$	$\frac{a^{dx+e}}{d\ln a}+c$	$\frac{\ln\|ax+b\|}{a}+c$

11.1.2 Tehnika parcijalnog integriranja

Iz pravila za derivaciju umnoška funkcija $d(uv) = duv + udv$ integriranjem dobivamo $uv = \int vdu + \int udv$. Iz ovog izraza slijedi formula za parcijalnu integraciju koja glasi

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{11.3}$$

Parcijalno integriranje primjenjuje se na određivanje integrala produkta dviju funkcija kako bi se integral koji ne znamo odrediti sveo na jednostavniji kojega je moguće odrediti. Parcijalna integracija povodi se odabirom faktora dv kojeg treba integrirati, i faktora u koji se derivira. U tu svrhu pogodno je za u odabrati faktor koji deriviranjem postaje jednostavniji, a za dv faktor kojemu nije teško odrediti antiderivaciju v.

■ **Primjer 11.6** Metodom parcijalne integracije odredite opće rješenje sljedećih problema:

1. $\int xe^x dx$

   Rješenje: Za faktor u biramo dio x, njega ćemo derivirati i on deriviranjem postaje jednostavniji. Izraz $e^x dx$ označit ćemo s dv i njega ćemo lako integrirati. Poslije toga primijenimo formulu parcijalnog integriranja:

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^x dx}_{dv} = \begin{bmatrix} u = x & dv = e^x dx \\ \downarrow' & \downarrow \int \\ du = dx & v = e^x \end{bmatrix} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c.$$

2. $\int (3-2x)e^{-x} dx$

   Rješenje: Kako bismo odabrali izraz za u i dv, razmislimo koja se od dvije podintegralne funkcija (polinom prvog stupnja i eksponencijalna funkcija) pojednostavnjuje pri derivaciji; to je naravno polinom prvog stupnja čija je derivacija konstanta. Sada imamo:

$$\begin{aligned}
\int (3-2x)e^{-x} dx &= \begin{bmatrix} u = 3-2x & dv = e^{-x} dx \\ \downarrow' & \downarrow \int \\ du = -2dx & v = \frac{e^{-x}}{-1} \end{bmatrix} \\
&= (3-2x)\frac{e^{-x}}{-1} - \int \frac{e^{-x}}{-1}(-2)dx \\
&= (2x-3)e^{-x} - 2\int e^{-x} dx \\
&= (2x-3)e^{-x} - 2\frac{e^{-x}}{-1} + c \\
&= (2x-1)e^{-x} + c
\end{aligned}$$

■

Vježba 11.5 Metodom parcijalne integracije odredite sljedeće integrale:

1. $\int \ln x dx$ — $x\ln x - x + c$
2. $\int t \ln 2t dt$ — $\frac{t^2}{2}\ln 2t - \frac{t^2}{4} + c$
3. $\int (3-2x)e^{-x} dx$ — $-(3-2x)e^{-x} - 2e^{-x} + c$
4. $\int x\sqrt{2-x} dx$ — $-\frac{2}{3}x\sqrt{2-x}^3 - \frac{4}{15}\sqrt{2-x}^5 + c$

11.2 Zadatci za vježbanje

1. Odredite
   (a) $\int(-x+3)dx$
   (b) $\int(x^2-2x)dx$
   (c) $\int(x+3)^2dx$
   (d) $\int(x+1)(3x-2)dx$
   (e) $\int(2x-\frac{3}{x})^2dx$
   (f) $\int\frac{20}{x}dx$
   (g) $\int\frac{x-1}{x}dx$

2. Odredite supstitucijom:
   (a) $\int(x^2+3x-7)^5(2x+3)dx$
   (b) $\int\frac{1}{x\ln x}dx$
   (c) $\int e^{x^2-5x}(2x-5)dx$
   (d) $\int x^2e^{x^3+1}dx$
   (e) $\int x\sqrt{x^2+1}dx$
   (f) $\int\frac{e^x}{(e^x+1)^2}dx$
   (g) $\int\frac{1}{x}(\ln x)^3dx$
   (h) $\int x^2e^{x^3}dx$

3. Odredite parcijalnim integriranjem:
   (a) $\int x\ln x dx$
   (b) $\int(1-x)e^xdx$
   (c) $\int x\ln 2x dx$
   (d) $\int x^3e^xdx$

4. Graničnu dobit kioska brze prehrane opisuje funkcija $D'(x)=-2x+20$, gdje je x količina prodaje izražena u stotinama komada. Odredite funkciju dobiti ako znamo da kiosk ostvaruje gubitak od 50 eura ukoliko ništa ne proda.

5. Procjenjuje se da će se x mjeseci od danas vrijednost $V(x)$ hektara zemljišta povećavati brzinom

$$V'(x)=\frac{0.4x^3}{\sqrt{0.2x^4+90000}}$$

   dolara po godini. Trenutna je vrijednost zemljišta 500$ po hektru.
   (a) Odredite $V(x)$.
   (b) Nakon koliko će se vremena cijena povećati na 600$?

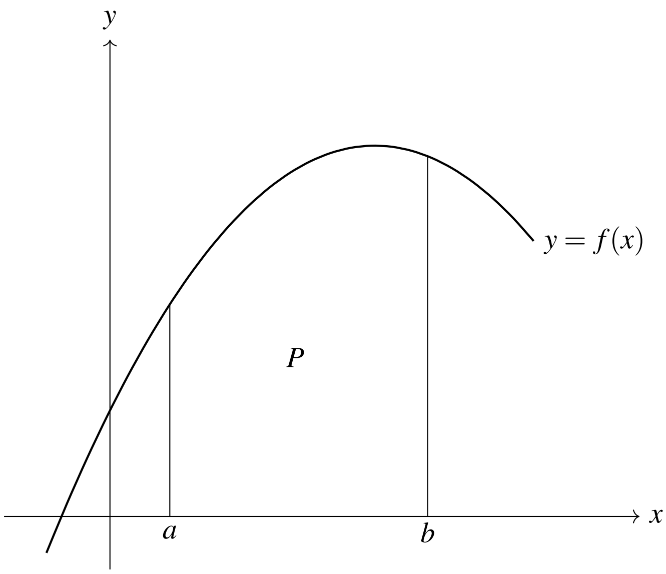
Rješenja zadataka

1. (a) $-\frac{x^2}{2}+3x+c$
   (b) $\frac{x^3}{3}-x^2+c$
   (c) $\frac{x^3}{3}+3x^2+9x+c$
   (d) $x^3+\frac{x}{2}-2x+c$
   (e) $\frac{4}{3}x^3-12x-\frac{9}{x}+c$
   (f) $20\ln|x|+c$
   (g) $x-\ln|x|+c$
2. (a) $\frac{1}{6}(x^2+3x-7)^6+c$
   (b) $\ln|\ln x|+c$
   (c) $e^{x^2-5x}+c$
   (d) $\frac{1}{3}e^{x^3+1}+c$
   (e) $\frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}+c$
   (f) $\frac{-1}{e^x+1}+c$
   (g) $\frac{1}{4}(\ln x)^4+c$
   (h) $\frac{1}{3}e^{x^3}+c$
3. (a) $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+c$
   (b) $(2-x)e^x+c$
   (c) $\frac{1}{2}x^2\ln 2x-\frac{1}{4}x^2+c$
   (d) $e^x(x^3-3x^2+6x-6)+c$
4. $D(x)=-x^2+20x-50$
5. (a) $V(x)=\sqrt{0.2x^4+90000}+200$
   (b) cijena će se povećati na 600 za 24.32 mjeseci

12. Primjene integralnog računa

12.1 Pojam određenog integrala

Neka je na segmentu $I = [a,b]$, za $a,b \in \mathbb{R}, a < b$, zadana neprekidna, nenegativna funkcija f. Pitamo se kolika je površina P lika kojega s x-osi zatvara graf funkcije f na segmentu $[a,b]$:

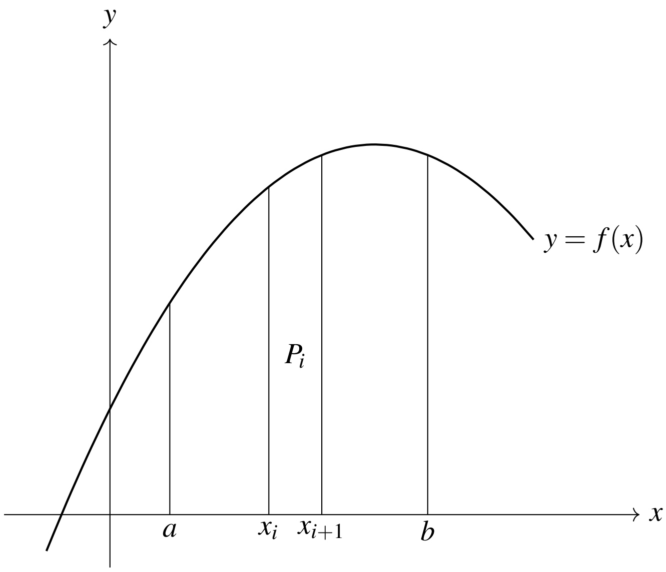


Slika 12.1: Ilustracija problema površine

Budući je f neprekidna na $[a,b]$, ona na $[a,b]$ poprima minimalnu vrijednost m i maksimalnu vrijednost M. (Za funkciju kojoj je graf kao na slici je $m = f(a), M = f(b)$). Grubu procjenu vrijednosti površine P možemo odmah dati:

$$m(b-a) \leq P \leq M(b-a). \tag{12.1}$$

Za finiju procjenu vrijednosti površine, radimo sljedeće. Segment $[a,b]$ podijelimo na n podsegmenata $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, n$ pri čemu je $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1} = b$.



Slika 12.2: Ilustracija postupka subdivizije segmenta

Dobiveni skup segmenata zovemo subdivizijom segmenta I. Na svakom od segmenata $[x_i, x_{i+1}]$ je funkcija f neprekidna, pa postoji minimum m_i i maksimum M_i funkcije f na njemu. Stoga za površinu P_i ispod grafa funkcije f na segmentu $[x_i, x_{i+1}]$ vrijedi:

$$m_i(x_{i+1} - x_i) \leq P_i \leq M_i(x_{i+1} - x_i). \tag{12.2}$$

Primjetimo da za svaki $x_0 \in [x_i, x_{i+1}]$ vrijedi

$$m_i(x_{i+1} - x_i) \leq f(x_0)(x_{i+1} - x_i) \leq M_i(x_{i+1} - x_i). \tag{12.3}$$

Sumu

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_{i+1} - x_i) \tag{12.4}$$

zovemo donja integralna suma. Sumu

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_{i+1} - x_i) \tag{12.5}$$

zovemo gornja integralna suma. Za svaku subdiviziju intervala I (odabir broja podsegmenata i točaka x_i koje su rubovi podsegmenata od I) točno su određene integralne sume s i S.

Integralne sume imaju sljedeća važna svojstva:

1. Ako subdiviziju profinimo, tj. točkama $x_1, \dots, x_{n+1}$ dodamo još točaka iz I, dobivamo novu subdiviziju i njoj pridružene sume s' i S'. Vrijedi $s \leq s'$ i $S' \leq S$, odnosno profinjenjem subdivizije donje integralne sume ne padaju niti gornje rastu.
2. Svaka je donja integralna suma manja od bilo koje gornje integralne sume.

Skup svih donjih integralnih suma s_I koje dobivamo za razne subdivizije od I je ograničen odozdo i odozgo. Isto je slučaj i za skup S_I svih gornjih integralnih suma. Najveću gornju granicu skupa svih donjih integralnih suma, odnosno $\sup s_I$ zovemo donji Riemannov integral. Najmanju gornju granicu skupa svih gornjih integralnih suma, odnosno $\inf S_I$ zovemo gornji Riemannov integral. Tražena površina je "ukliještena" između dviju spomenutih granica.

Definicija 12.1.1 — Riemannov integral. Za ograničenu funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ kažemo da je **integrabilna** na I ako je $\sup s_I = \inf S_I$. Broj $\sup s_I = \inf S_I$ zovemo **Riemannov integral** ili **određeni integral** funkcije f na $I = [a,b]$ i bilježimo ga s

$$\int_a^b f(x)dx. \tag{12.6}$$

Zapis iz definicije čitamo: "integral od a do b ef od iks de iks". Rubove a, b segmenta $[a,b]$ zovemo donjom, odnosno gornjom granicom određenog integrala. Vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 12.1.1 Ako je funkcija neprekidna na I, onda je ona integrabilna na I.

Određeni integral neprekidne, nenegativne funkcije $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je po iznosu jednak površini koju s x-osi zatvara graf funkcije f na segmentu $[a,b]$. Činjenica da za neprekidnu funkciju f na $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx \tag{12.7}$$

postoji, ne upućuje na to kako da dani integral izračunamo.
Neka je f neprekidna funkcija na $I = [a,b]$. Teorem 12.1.1 kaže da je ona integrabilna na $[a,b]$, no onda je integrabilna i na $[a,x]$ za $x \in [a,b]$. Dakle, postoji funkcija Φ zadana s

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt. \tag{12.8}$$

Pokazuje se da je derivacija funkcije Φ po x jednaka baš $f(x)$, pa je Φ primitivna funkcija za f. Bilo koja druga primitivna funkcija F za f razlikuje se od Φ za konstantu c tj. $\Phi(x) = F(x) + c$. Kako je $\Phi(a) = 0$ (očito je $\int_a^a f(x)dx = 0$), imamo da je $F(a) + c = 0$, odakle je $c = -F(a)$. Dakle, $\Phi(x) = F(x) - F(a)$ za sve $x \in [a,b]$. Posebno je $\Phi(b) = F(b) - F(a)$ za neku primitivnu funkciju F od f. Dobili smo osnovni teorem integralnog računa ili Newton-Leibnitz-ovu formulu:

Teorem 12.1.2 Neka je f integrabilna funkcija na $[a,b]$. Tada je za primitivnu funkciju F od f

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{12.9}$$

Određeni integral nalazi se tako da se prvo odredi antiderivacija, a potom se izračuna razlika vrijednosti antiderivacije u desnom rubu segmenta i vrijednosti antiderivacije u lijevom rubu segmenta. Primjerice:

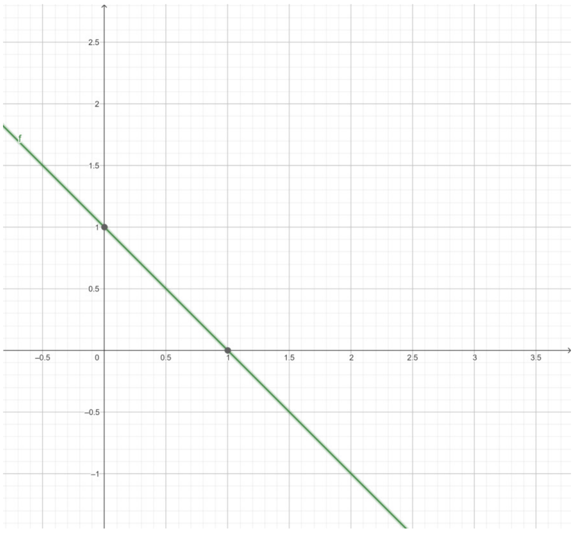
$$\int_1^2 xdx = \frac{x^2}{2}\bigg|_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{3}{2}. \tag{12.10}$$

12.2 Primjene integralnog računa

12.2.1 Određivanje površine pod krivuljom

Određeni integral $\int_a^b f(x)dx$ po iznosu je jednak površini koju s x-osi zatvara graf nenegativne funkcije f na segmentu $[a,b]$.

■ **Primjer 12.1** Odredimo površinu koju s koordinatnim osima zatvara pravac $y = -x + 1$.



Slika 12.3: Površina koju s osima zatvara pravac $y = -x + 1$

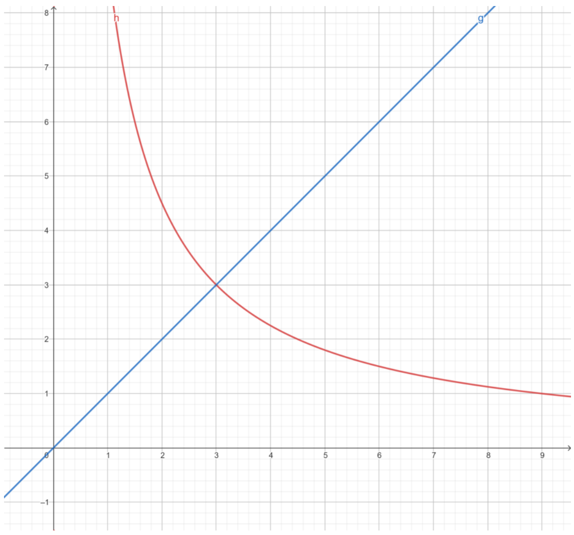
Rješenje: Na slici 12.3 su vidljive granice integracije, tražena površina nalazi se iznad segmenta $[0, 1]$. Zato je

$$P = \int_0^1 (-x+1)dx = \left(-\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_0^1 = \left(-\frac{1^2}{2} + 1\right) - \left(-\frac{0^2}{2} + 0\right) = \frac{1}{2} \text{ kvadratne jedinice.}$$

■

■ **Primjer 12.2** Odredimo površinu koju na segmentu $[0, 4]$ s x-osi zatvaraju krivulje $y = x$ i $y = \frac{9}{x}$.

Rješenje: Pri određivanju površine važno je skicirati grafove krivulja kako bismo im vidjeli sjecišta i položaj:



Slika 12.4: Ilustracija položaja grafova $y = x$ i $y = \frac{9}{x}$

Sa slike je vidljivo da je tražena površina P na segmentu $[0, 3]$ natkrivena pravcem $y = x$, a na segmentu $[3,4]$ granom hiperbole $y = \frac{9}{x}$ te je stoga jednaka:

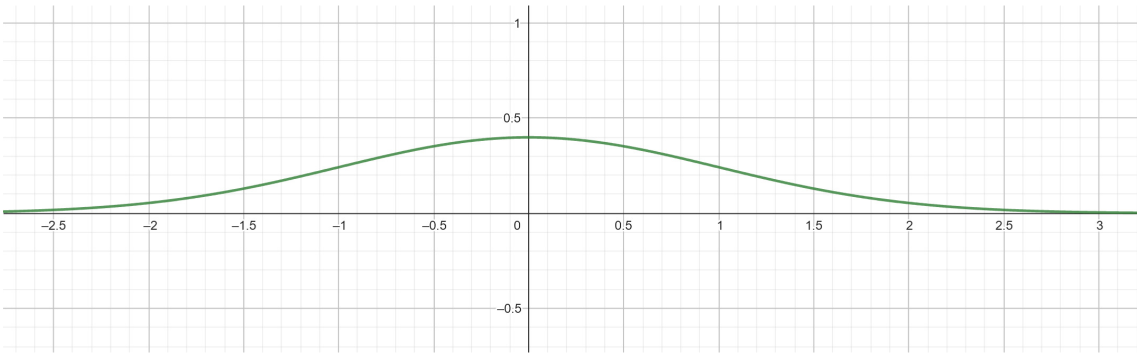
$$P = \int_0^3 x dx + \int_3^4 \frac{9}{x} dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^3 + 9 \ln x|_3^4 \approx 7.089 \text{ kvadratnih jedinica (k. j.)}$$

■

Činjenicu da je uz pomoć integrala moguće odrediti površinu ispod grafa pozitivne funkcije moguće je iskoristiti u određivanju vjerojatnosti. Vjerojatnostne su funkcije one za koje je površina pod grafom funkcije fiksna i iznosi 1. Tako je vjerojatnostna funkcija tzv. normalne raspodjele $N(\mu, \sigma)$ (gdje je μ srednja vrijednost raspodjele, a σ njezina standardna devijacija) zadana formulom

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}. \tag{12.11}$$

Za zadane μ i σ to je eksponencijalna funkcija čiji je graf zvonolika krivulja simetrična oko pravca $x = \mu$. Kod tzv. standardne normalne raspodjele $N(0,1)$ je $\mu = 0, \sigma = 1$ i graf funkcije (tzv. funkcije gustoće) te vjerojatnostne raspodjele ima sljedeći izgled.



Slika 12.5: Graf funkcije standardne normalne raspodjele

Određivanje vjerojatnosti da x poprimi vrijednosti unutar jedne standardne devijacije oko srednje vrijednosti svodi se na računanje integrala

$$P(-1 < x < 1) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx. \tag{12.12}$$

Ovaj račun prelazi granice našeg znanja integriranja pa sličan slučaj ilustriramo sljedećim primjerom.

■ **Primjer 12.3** Funkcija gustoće vjerojatnostne raspodjele koja opisuje duljinu trajanja telefonskog poziva zadana je formulom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Varijabla x označava trajanje poziva u minutama. Odredimo vjerojatnosti:

1. da će slučajno odabran razgovor trajati između 2 i 3 minute
2. da će slučajno odabran razgovor trajati dulje od 2 minute.

Rješenje:

1. Odredimo
$$P(2<x<3)=\int_2^3 \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}dx=\left(-e^{-\frac{1}{2}x}\right)\Big|_2^3=0.1447.$$
Vjerojatnosti su brojevi između 0 i 1. Rezultat znači da je vjerojatnost da će telefonski razgovor trajati od 2 do 3 minute malo veća od 14%.
2. Vjerojatnost da će telefonski razgovor trajati dulje od 2 minute je
$$P(x>2)=\int_2^\infty \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}dx.$$
Takve integrale nismo susretali. Oni se daju izračunati kao
$$\int_2^\infty \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}dx=\lim_{m\to\infty}\int_2^m \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}dx.$$
Međutim, traženu vjerojatnost (površinu) možemo odrediti i kao
$$P(x>2)=1-P(x\le 2)=1-\int_0^2 \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}dx=0.3679.$$
Valjanost tog računa posljedica je činjenice da je ukupna površina pod grafom funkcije gustoće jednaka 1. Zato je i $P(0<x\le 2)+P(x>2)=1$, odakle slijedi račun.

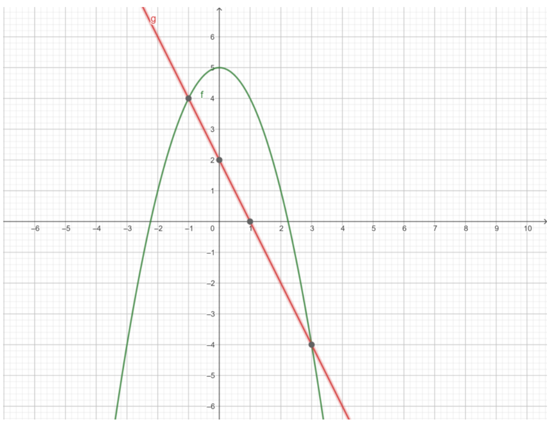
■

12.2.2 Određivanje površine između dvije krivulje

Ako su f i g realne i ograničene funkcije na segmentu $[a,b]$ takve da je $f(x)\ge g(x)$ za svaki $x\in[a,b]$, tada je površina P koju na segmentu $[a,b]$ zatvaraju krivulje $y=f(x)$ i $y=g(x)$ jednaka
$$P=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx. \tag{12.13}$$

Ako područje integracije nije zadano, treba skicirati grafove funkcija i odrediti ga sa slike ili algebarski.

■ **Primjer 12.4** Odredite površinu lika kojega zatvaraju parabola $y=5-x^2$ i pravac $y=2-2x$.



Slika 12.6: Ilustracija položaja grafova $y=5-x^2$ i $y=2-2x$

Rješenje: Sa slike vidimo da su sjecišta krivulja točke $(-1,4)$ i $(3,-4)$. To možemo i algebarski odrediti rješavanjem jednadžbe $5-x^2 = 2-2x$. Dakle, područje integracije treba biti segment $[-1,3]$. Sa slike vidimo da je tu parabola iznad pravca. Stoga je

$$P = \int_{-1}^{3} ((5-x^2-(2-2x))dx = \int_{-1}^{3} (-x^2+2x+3)dx = \left(-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right)\Big|_{-1}^{3} = \frac{32}{3}\text{k. j.}$$

■

Vježba 12.1 Odredimo površinu geometrijskog lika koji je na segmentu $[0,1]$ omeđen krivuljama $y = x^2$ i $y = x$. $\frac{1}{6}$ k.j.

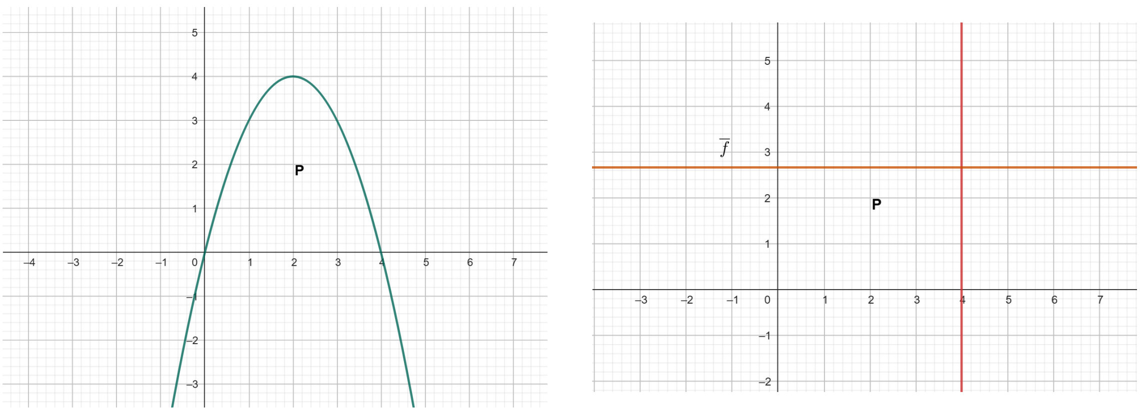
Vježba 12.2 Odredimo površinu koju zatvaraju krivulje $y = x^2+1$ i $y = 5-x^2$. 3.77 k.j.

12.2.3 Prosječna vrijednost funkcije

Prosječnu vrijednost $\overline{f(x)}$ funkcije f zadane na segmentu $[a,b]$ moguće je odrediti kao

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \tag{12.14}$$

Naime, površina P pod krivuljom $y = f(x)$ na segmentu $[a,b]$ jednaka je površini pravokutnika širine $b-a$ i visine jednake prosjeku $\overline{f}$ funkcije $f(x)$ na segmentu $[a,b]$ (vidite sliku 12.7).



Slika 12.7: Ilustracija prosječne vrijednosti funkcije

Vježba 12.3 Poznato je da je t sati nakon ponoći temperatura (izražena u stupnjevima Celzijusovim) u nekom gradu zadana funkcijom

$$C(t) = 3-\frac{2}{3}(t-13)^2,\ 0 \le t \le 24.$$

Kolika je prosječna temperatura u gradu između 6 i 14 h? $-6.5°$C

Vježba 12.4 Zadana je funkcija ukupnog troška (u eurima) neke proizvodnje u ovisnosti o broju komada proizvoda:

$$T(x) = 15+0.8x+\frac{x^2}{100}.$$

Odredite prosječni trošak proizvodnje na razini proizvodnje 50 komada proizvoda.

43.33 eura po kom

12.2.4 Primjena integralnog računa u graničnoj analizi

Prema Newton-Leibnitzovoj formuli je

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a). \tag{12.15}$$

Dakle, integriramo li derivaciju funkcije f od a do b, iznos tog određenog integrala je jednak promjeni vrijednosti funkcije kod promjene nezavisne varijable x od a do b.

Vježba 12.5 Granični trošak (u eurima) neke proizvodnje opisan je funkcijom $T'(x) = x^2 + 3x$. Odredimo trošak proizvodnje 20 proizvoda.

$T(20) = T(20) - T(0) = \int_0^{20}(x^2 + 3x)dx = 3\,266.67$ eura

Vježba 12.6 Odredimo za koliko je prihod od prodaje 15 jedinica proizvoda veći od prihoda prodaje 9 jedinica proizvoda ako je funkcija graničnog prihoda (izraženog u eurima) od prodaje x jedinica proizvoda zadana s $P'(x) = 100 + 4x - x^2$.

$P(15) - P(9) = \int_9^{15}(100 + 4x - x^2)dx = 6$ eura

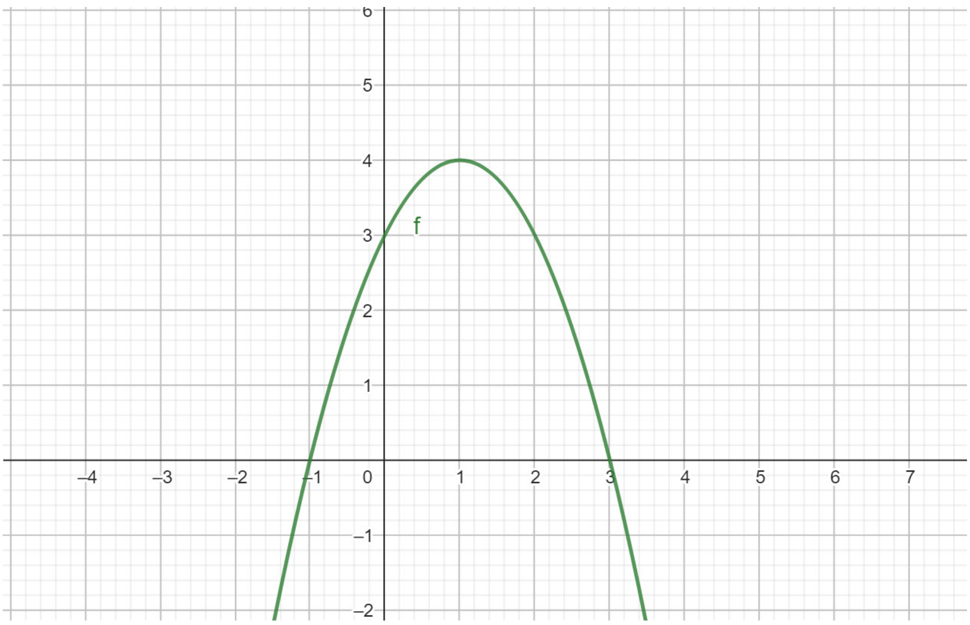
Vježba 12.7 — Korisni vijek proizvoda. Granični trošak i prihod igre na automatima t godina od uvođenja igre iznose $T'(x) = 2$ tisuće eura, a $P'(t) = 9e^{-0.5t}$ tisuća eura. Općenito se vrijednost za koju je $T'(t) = P'(t)$ zove **korisni vijek** proizvoda.

1. Odredimo korisni vijek igre. $t = 3$ godine
2. Kolika je ukupno ostvarena dobit (akumulirana dobit) tijekom korisnog vijeka igre?

   $D(3) = \int_0^3 (9e^{-0.5t} - 2)dt = 7.98366$, $7\,983.66$ eura

12.3 Zadatci za vježbanje

1. Odredite određene integrale:
   (a) $\int_0^1 x^2 dx$
   (b) $\int_1^2 (3x^2 - 5x + 7)dx$
   (c) $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx$
   (d) $\int_1^2 (-x+3)dx$
   (e) $\int_2^3 (x^2 - 2x)dx$
   (f) $\int_{-1}^1 (x+3)^2 dx$
   (g) $\int_{-1}^0 e^x dx$
2. Odredite površinu lika omeđenog s x-osi i grafom funkcije $f(x) = 4 - x^2$ na segmentu $[0,1]$. Skicirajte.
3. Skicirajte i odredite površinu koju s x-osi zatvara graf funkcije $f(x) = 4 - x^2$.
4. Skicirajte i odredite površinu koju s x-osi zatvaraju krivulje $y = x$ i $y = (x-2)^2$ na segmentu $[0,2]$.
5. Pogledajte Sliku 12.8 i izračunajte veću od dvije površine koju s koordinatnim osima zatvara graf funkcije $f(x) = (3-x)(x+1)$.
6. Rast dnevne dobiti (u stotinama eura) tvrtke opisuje funkcija $D'(x) = 100 - x$ gdje je x broj dana od kada je tvrtka pokrenula posao.
   (a) Odredite ukupnu dobit tvrtke u prvih 10 dana.
   (b) Odredite dobit između 10. i 20. dana poslovanja tvrtke.



Slika 12.8: Graf funkcije $f(x) = (3-x)(x+1)$

7. Granični trošak proizvodnje x jedinica proizvoda zadan je funkcijom

$$T'(x) = 50 + 0.4x.$$

Ako je trenutna proizvodnja 10 jedinica dnevno, odredite koliko će veći biti trošak proizvodnje 20 jedinica dnevno.

8. Knjigovodstvena vrijednost (u eurima) fotokopirnog stroja u prvih godinu dana pada brzinom $V'(x) = 5(x-12)$ za vrijeme x dano u mjesecima. Odredite ukupni gubitak vrijednosti stroja u prvih pet mjeseci (od 0. do 5.) i u drugih pet mjeseci (od 5. do 10.).

9. Odredite srednju vrijednost funkcije $f(x) = x - 3x^2$ na intervalu [-1,2].

10. Granične vrijednosti ukupnog troška i prihoda rudnika ugljena su $T'(x) = 3$ tisuća eura i $P'(t) = 20e^{-0.1t}$ tisuća eura t godina od početka eksploatacije. Odredite korisni vijek rudnika zaokružen na najbližu godinu. Odredite i ukupno ostvarenu dobit tijekom korisnog vijeka rudnika.

Rješenja zadataka

1. (a) $\frac{1}{3}$
   (b) $\frac{13}{2}$
   (c) $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$
   (d) $\frac{3}{2}$
   (e) $\frac{4}{3}$
   (f) $\frac{56}{3}$
   (g) 0.63
2. $\frac{11}{3}$
3. $\frac{32}{3}$
4. $\frac{5}{6}$
5. 9
6. (a) 95 000 eura
   (b) 85 000 eura
7. 560 eura
8. -237.5 eura, -112.5 eura
9. $-\frac{5}{2}$
10. 19 god, 113 086 eura

A. Elementi linearnog programiranja

Što je problem linearnog programiranja? To je određivanje optimalnog rješenja matematičkog modela realnog životnog problema. Optimalno rješenje maksimizira ili minimizira neku veličinu od interesa. Na primjer, investitor želi uložiti sredstva u onu investiciju koja će mu donijeti maksimalnu dobit (cilj) bez velikog rizika (ograničenje). Ili, nutricionist sastavlja dijetu tako da broj kalorija bude minimalan (cilj), ali da budu zadovoljeni svi prehrambeni zahtjevi (ograničenje). U svakom problemu imamo zadanu funkciju cilja i ograničenja. Problem zovemo linearnim jer je funkcija cilja linearna te su ograničenja zadana kao linearne nejednadžbe.

■ **Primjer A.1** Postavimo problem linearnog programiranja za sljedeći problem. Proizvođač proizvodi dva tipa goriva, regular (R) i super (S). Sirovina u proizvodnji prolazi procese prerade i pročišćavanja. Za dobivanje jedne jedinice goriva tipa R prerada traje 0.2 sata, pročišćavanje 0.5 h. Za dobivanje jedne jedinice goriva tipa S prerada traje 0.4 sata, a pročišćavanje 0.2 h. Pogoni prerade i pročišćavanja rade svaki po 8 h dnevno. Zarada proizvođača po prodanoj litri goriva tipa R je 30 centi te 50 centi po litri goriva tipa S. Koliku količinu pojedinog goriva mora proizvođač dnevno proizvesti da mu zarada bude maksimalna?

Rješenje: Označimo s

- x - količinu dnevne proizvodnje goriva tipa R,
- y - količinu dnevne proizvodnje goriva tipa S.

Cilj je proizvođača maksimalna zarada. **Funkcija cilja** je $c(x,y) = 30x + 50y$ i nju treba maksimizirati.

Međutim proces proizvodnje nameće **ograničenja**.

- Imamo ograničenje na proces prerade; on ne može dnevno biti dulji od 8 sati. Dakle, imamo nejednadžbu $0.2x + 0.4y \leq 8$
- Ograničenje je i na proces pročišćavanja; imamo nejednadžbu $0.5x + 0.2y \leq 8$.

Još valja primijetiti da mora biti i $x \geq 0, y \geq 0$ budući su količine proizvodnje nenegativni brojevi. Zadan je problem linearnog programiranja.

$$\begin{aligned} 30x+50y &\to \max, \\ 0.2x+0.4y &\leq 8 \\ 0.5x+0.2y &\leq 8 \\ x \geq 0, y &\geq 0 \end{aligned}$$

■

Definicija A.0.1 — Moguć problem linearnog programiranja . Neka je zadan problem linearnog programiranja: optimizirati linearnu funkciju cilja uz skup ograničenja (sustav linearnih nejednadžbi). Problem linearnog programiranja je **moguć (konzistentan)** ako postoji barem jedan vektor koji zadovoljava skup ograničenja. Svi takvi vektori čine **skup mogućih rješenja** problema linearnog programiranja. Moguće rješenje koje ujedno optimizira funkciju cilja zove se **optimalno rješenje**.

Kod problema linearnog programiranja govorimo o programiranju zato što optimalno rješenje određuje (programira) obrazac po kome se odvija problemom razmatrana aktivnost. Linearno se programira npr. transport (red letenja aviona, dostava robe), industrijska i poljoprivredna proizvodnja, trgovina. U određivanje rješenja ulaze mnogi faktori. Skup ograničenja čine golemi sustavi linearnih nejednadžbi koji se rješavaju algebarskim metodama uz pomoć računala. Mi ćemo promotriti tek osnove metode grafičkog rješavanja problema linearnog programiranja. Problemi linearnog programiranja ovdje su mali (s dvije varijable odlučivanja) i rješavat ćemo ih grafički.

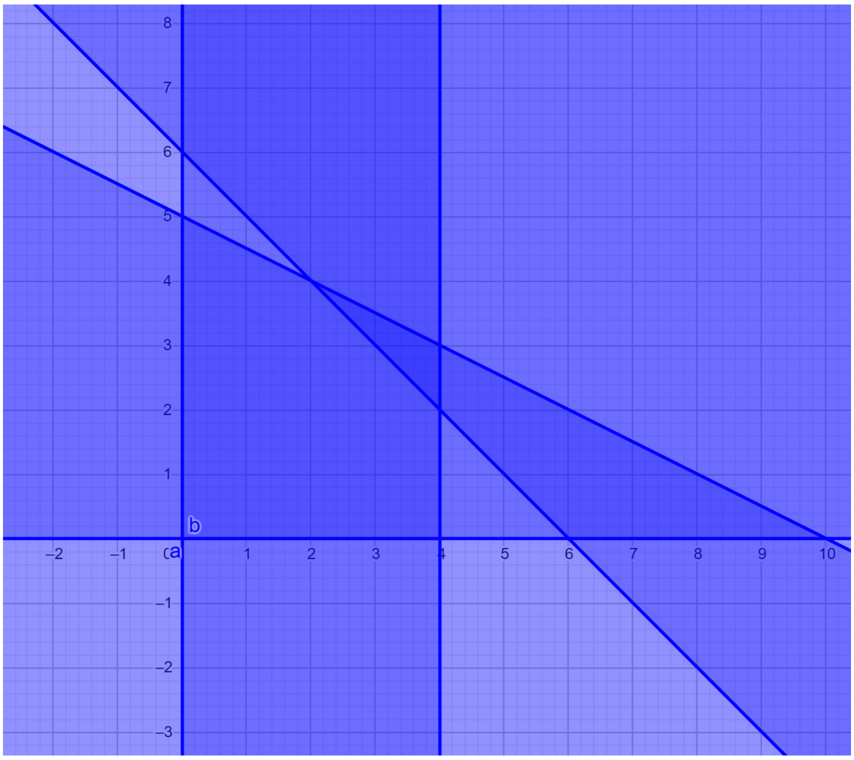
A.1 Grafičko rješavanje sustava linearnih nejednadžbi

■ **Primjer A.2** Riješimo grafički sustav linearnih nejednadžbi:

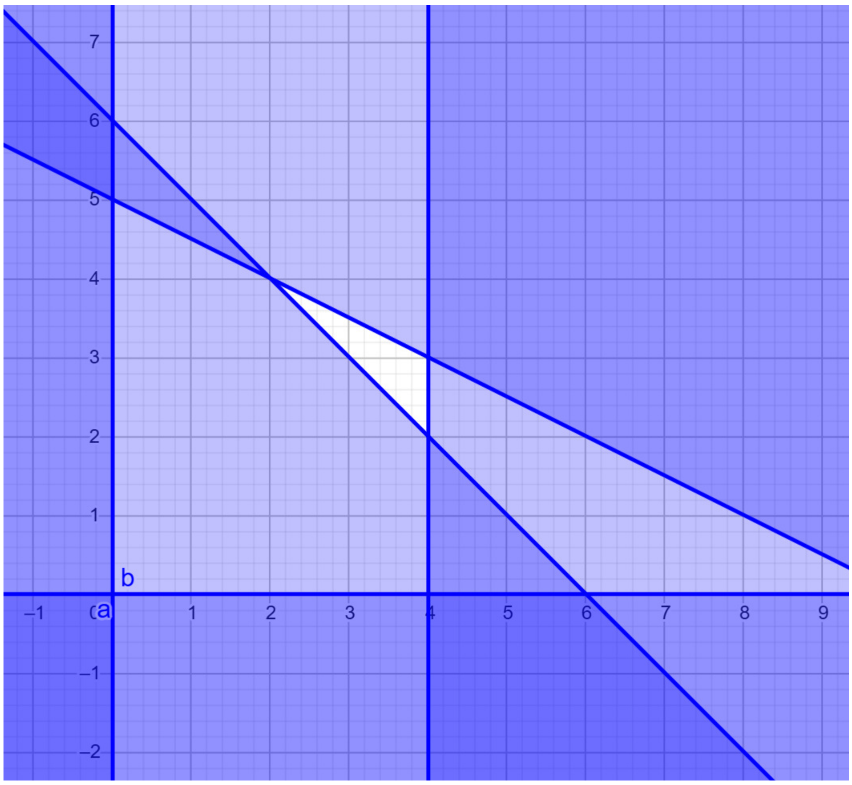
$$\begin{aligned} x+2y &\leq 10 \\ x+y &\geq 6 \\ x \geq 0, y &\geq 0. \end{aligned}$$

Rješenje: Primijetimo da je rješenje sustava linearnih nejednadžbi dio prvog kvadranta (zbog uvjeta nenegativnosti varijabli).
Linearna jednadžba $x+2y=10$ određuje u koordinatnom sustavu jedan pravac. Sve točke (x,y) čije koordinate zadovoljavaju jednadžbu (npr. točke $(0,5),(2,4)$) pripadaju tom pravcu. Pogledamo li linearnu nejednadžbu $x+2y \leq 10$, ona u koordinatnom sustavu određuje jednu poluravninu (onu "ispod" pravca $x+2y=10$). Naime, svaka točka te poluravnine zadovoljava nejednakost $x+2y \leq 10$ (primjerice točke: $(2,3),(4,2),(7,1)$).
Rješenje danog sustava linearnih nejednadžbi jest dio prvog kvadranta dobiven kao presjek ove poluravnine i poluravnina zadanih nejednadžbama $x+y \geq 6$ i $x \leq 4$. To je trokut s vrhovima u točkama: $(4,2),(4,3)$ i $(2,4)$. Skup mogućih rješenja ovog sustava linearnih nejednadžbi čine sve točke unutar tog trokuta.
Na slici A.1 je skup mogućih rješenja najtamnije obojan jer je presjek ukupno pet poluravnina. Prigodno je skup mogućih rješenja grafički tražiti tako da se obrnu sve nejednakosti u skupu ograničenja. Tada on ostaje neobojen i lakše ga je uočiti (slika A.2).

■



Slika A.1: Rješenje sustava linearnih nejednadžbi (tamno)



Slika A.2: Rješenje sustava linearnih nejednadžbi (bijelo)

A.2 Grafičko rješavanje problema linearnog programiranja

Kad znamo grafički riješiti sustav linearnih nejednadžbi, na korak smo od mogućnosti grafičkog rješavanja problema linearnog programiranja.

■ **Primjer A.3** Recimo da na gornjem skupu mogućih rješenja želimo maksimizirati funkciju cilja $c(x,y) = 2x+y$. Problem linearnog programiranja kojeg valja riješiti glasi:

$$\begin{aligned} 2x+y &\to \max \\ x+2y &\leq 10 \\ x+y &\geq 6 \\ x \geq 0, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Rješenje: Kad imamo skup mogućih rješenja problema linearnog programiranja, tražimo optimalno rješenje. Izraz kojim je zadana funkcija cilja pretvorimo u jednadžbu pravca koji prolazi ishodištem koordinatnog sustava: $2x+y=0$. Taj pravac zove se **izoprofitna linija**. Da bismo odredili optimalno rješenje, moramo odrediti maksimalnu vrijednost izraza $2x+y$ na skupu mogućih rješenja. Geometrijski to se radi ovako: zamišljamo paralelno pomicanje izoprofitne linije preko skupa mogućih rješenja. Tražimo onu točku skupa mogućih rješenja kroz koju će izoprofitna linija pri tom pomicanju zadnju proći. Vidimo da je to točka $C(4,3)$. Ona je optimalno rješenje.

■

Slično se radi kad tražimo minimum funkcije cilja na skupu mogućih rješenja. U tom slučaju graf funkcije cilja zovemo **izotroškovna linija**. Kod određivanja minimuma, tražimo onu točku skupa mogućih rješenja kroz koju pri paralelnom pomicanju izotroškovna linija prvu prođe.
Općenito će skup mogućih rješenja biti mnogokut, a optimalno se rješenje postiže u jednom ili više vrhova skupa mogućih rješenja.

Teorem A.2.1 Ako je skup mogućih rješenja sustava linearnih nejednadžbi koje su ograničenja problema linearnog programiranja omeđen, optimalno rješenje postoji i ostvaruje se u jednom ili više vrhova skupa mogućih rješenja. Ako je skup mogućih rješenja neomeđen, optimalno rješenje ne mora postojati. Ako ipak postoji, opet se postiže u jednom ili više vrhova skupa mogućih rješenja.

U našem primjeru funkcija cilja $z=2x+y$ postiže maksimum u vrhu $C(4,3)$. To smo utvrdili geometrijski. U isto se možemo uvjeriti i algebarski, računom. Prema teoremu znamo da se optimalno rješenje postiže u vrhu skupa mogućih rješenja. Stoga možemo odrediti vrijednosti funkcije cilja u vrhovima skupa mogućih rješenja:

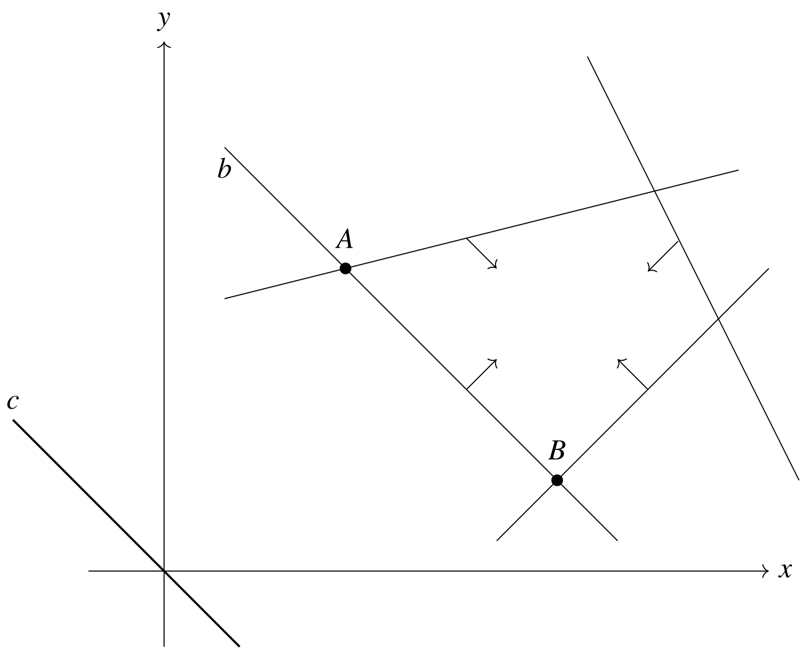
(x,y)	$(4,2)$	$(2,4)$	$(4,3)$
$2x+y$	10	8	11

Vidimo da funkcija cilja najveću vrijednost poprima u točki $(4,3)$. Maksimalna vrijednost funkcije cilja iznosi 11.

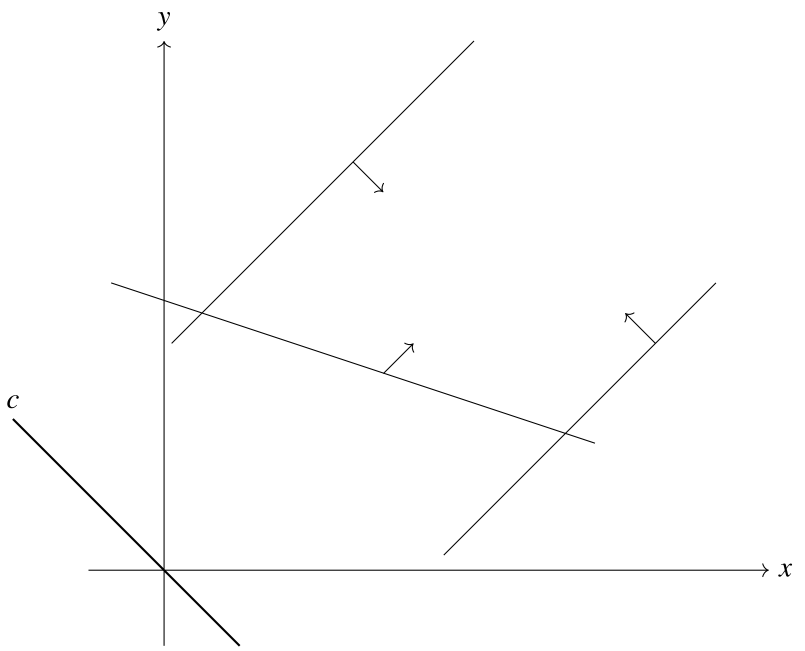
R Kako je moguće da se optimalno rješenje postiže u više vrhova skupa mogućih rješenja? To se može dogoditi kada je izoprofitna (izotroškovna) linija paralelna nekom od pravaca koji su rubni pravci skupa mogućih rješenja (na slici A.3 je $c \| b$). Ukoliko je postavljen problem nalaženja minimuma funkcije cilja čija je izotroškovna linija c, optimalno rješenje je svaka točka dužine AB.

Skup mogućih rješenja problema linearnog programiranja može biti neomeđen (slika A.4).

Ako je c izoprofitna linija, vidimo da ona na skupu mogućih rješenja maksimum poprima u beskonačnosti, pa rješenja nema. Poprima li izotroškovna linija optimum?



Slika A.3: Optimalno rješenje je svaka točka dužina AB



Slika A.4: Skup rješenja problema linearnog programiranja je neomeđen

U grafičkom rješavanju problema linearnog programiranja udomaćio se postupak rješavanja koji nije sasvim grafički. Naime, kad se grafički dobije skup mogućih rješenja i odrede njegovi vrhovi, onda se algebarski računa vrijednost funkcije cilja u svakom pojedinom vrhu. Vrh u kome je vrijednost funkcije cilja optimalna je optimalno rješenje. Unatoč tome što optimalno rješenje ne dobivamo pomicanjem grafa funkcije cilja, tu metodu zvat ćemo grafičkom.

Postupak grafičkog rješavanja problema linearnog programiranja provodimo kako slijedi:

1. Iz zadanog problema definiramo funkciju cilja i skup ograničenja (uvjete).
2. Na temelju uvjeta određujemo grafički skup mogućih rješenja.
3. Odredimo koordinate točaka koje su vrhovi skupa mogućih rješenja.
4. Algebarski odredimo vrijednosti funkcije cilja u svakom od vrhova skupa mogućih rješenja.
5. Ako je skup mogućih rješenja ograničen, optimalno rješenje su oni vrhovi skupa mogućih rješenja u kojima je vrijednost funkcije cilja optimalna (minimalna ili maksimalna). Ako je skup mogućih rješenja neograničen, zamišljenim pomicanjem izoprofitne ili izotroškovne linije provjerimo da li optimalno rješenje postoji. Ako postoji, optimalno rješenje su oni vrhovi u kojima je vrijednost funkcije cilja optimalna.

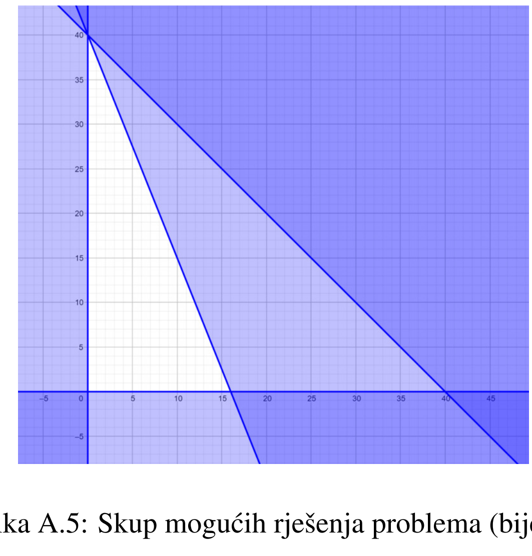
■ **Primjer A.4** Riješimo problem linearnog programiranja

$$\begin{aligned} 30x+50y &\to \max, \\ 0.2x+0.4y &\leq 8 \\ 0.5x+0.2y &\leq 8 \\ x \geq 0, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Rješenje: Prve dvije jednadžbe skupa ograničenja množimo s 10, kratimo i dobivamo problem

$$\begin{aligned} 30x+50y &\to \max, \\ x+2y &\leq 40 \\ 5x+2y &\leq 80 \\ x \geq 0,\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Grafički odredimo skup mogućih rješenja problema.



Slika A.5: Skup mogućih rješenja problema (bijelo)

To je trokut s vrhovima $(0,0)$, $(16,0)$ i $(0,40)$. Uvrštavanjem koordinati vrhova u funkciju cilja, vidimo da ona maksimum postiže u vrhu $(0,40)$: $c(0,40) = 2000$ centi.

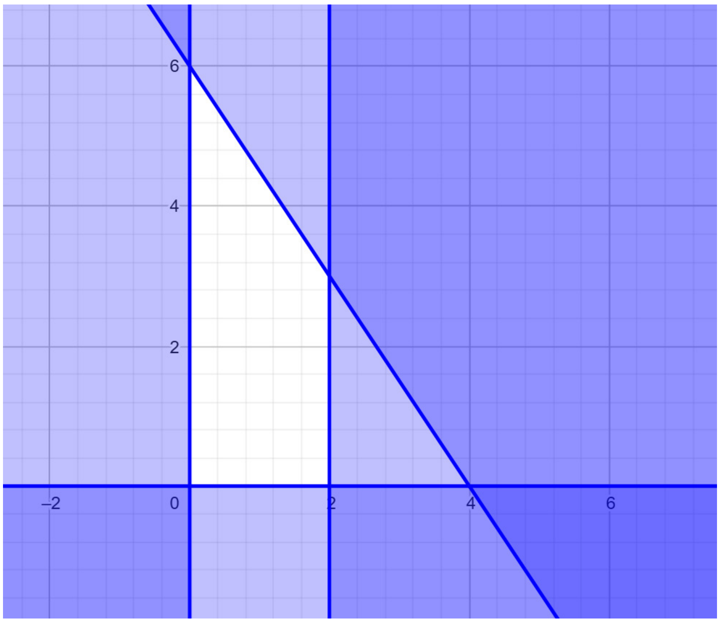
■

■ **Primjer A.5** Na dva stroja I i II proizvode se dva tipa proizvoda: A i B. Izrada proizvoda A zahtijeva 3 h obrade na stroju I i 5 h obrade na stroju II. Izrada proizvoda B zahtijeva samo 2 h obrade na stroju I. Kapacitet stroja I je 12 h rada dnevno, a stroja II 10 h rada dnevno. Proizvod A donosi prihod od 200 eura, a proizvod B 100 eura. Odredimo program opterećenja strojeva koji donosi maksimalni dnevni prihod.

Rješenje: Označimo s x broj proizvoda A, s y broj proizvoda B. Dnevni prihod proizvodnje je $200x+100y$. Tražimo da bude maksimalan. Koja su graničenja u prozvodnji? 3 h obrade po jedinici proizvoda A i 2 h obrade po jedinici B na stroju I ne smiju u zbroju prelaziti kapacitet stroja od 12 radnih sati dnevno, tj. mora biti $3x+2y \leq 12$. Slično, $5x \leq 10$. Dodajemo i uvjete nenegativnosti: $x \geq 0$, $y \geq 0$. Dobiven je problem linearnog programiranja:

$$\begin{aligned} 200x+100y &\to \max, \\ 3x+2y &\leq 12 \\ 5x \quad &\leq 10 \\ x \geq 0, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Riješimo problem. Prvo grafički određujemo skup mogućih rješenja. U tu svrhu nacrtajmo u koordinatnom sustavu pravce $3x+2y = 12$ i $x = 2$ $(5x = 10)$. Odredimo poluravnine koje su određene nejednakostima.



Slika A.6: Skup mogućih rješenja problema (bijelo)

Skup mogućih rješenja je omeđen. Vrhovi su mu: $(0,0), (2,0), (2,3)$ i $(0,6)$. Pogledajmo u kojem se vrhu postiže maksimum funkcije cilja:

(x,y)	$(0,0)$	$(2,0)$	$(2,3)$	$(0,6)$
$200x+100y$	0	400	700	600

.

Vrh $(2,3)$ je optimalno rješenje. Zaključujemo da je dnevni prihod proizvodnje maksimalno 700 eura ako se proizvedu 2 proizvoda tipa A i 3 proizvoda tipa B.

■

Vježba A.1 Riješite grafički problem linearnog programiranja.

$$\begin{aligned} x+2y &\to \min, \\ 3x+2y &\geq 6 \\ x \ + \ y &\leq 10 \\ x \geq 0, y &\geq 0 \end{aligned}$$

rješenje je $(2,0)$

B. Pregled formula

Aritmetički niz

a_1 - prvi član niza, d stalna razlika susjednih članova.
Opći član aritmetičkog niza: $a_n = a_1 + (n-1)d$.
Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza: $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$.

Geometrijski niz

a_1 - prvi član, q stalni kvocijent susjednih članova.
Opći član geometrijskog niza: $a_n = a_1 q^{n-1}$.
Zbroj prvih n članova geometrijskog niza: $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$.

Financijska matematika

p - godišnja kamatna stopa (%), C - uložena glavnica, n - vrijeme štednje, I - iznos kamate, q - dekurzivni kamatni faktor $q = 1 + p$, C_n - iznos nakon n godina štednje

Složeni kamatni račun s jednokratnom uplatom

Jedan obračun kamate godišnje: $C_n = Cq^n$.
Obračun kamata k puta godišnje, $C_n = C\left(1 + \frac{p}{k}\right)^{n \cdot k}$.

Složeni kamatni račun s višekratnim uplatama

- u jednakim vremenskim razmacima uplaćuju se (ili isplaćuju) stalni iznosi R na početku razdoblja (prenumerando račun) ili na kraju razdoblja (postnumerando račun).

Konačna vrijednost prenumerando uplata: $C_n = Rq\frac{q^n - 1}{q-1}$.
Konačna vrijednost postnumerando uplata: $C_n = R\frac{q^n - 1}{q-1}$.
Početna vrijednost prenumerando isplata: $A_n = R\frac{q^n - 1}{q^{n-1}(q-1)}$.
Početna vrijednost postnumerando isplata: $A_n = R\frac{q^n - 1}{q^n(q-1)}$.

R Ako se obračun kamata vrši k puta godišnje, tada je $r = \frac{p}{k}, q = 1 + r$ te se u svakoj od gornje četiri formule n zamjenjuje s kn.

Račun zajma

Iznos nominalno jednakih anuiteta a u otplati zajma iznosa C kroz n godina uz dekurzivni kamatni faktor q je $a = C\frac{q^n(q-1)}{q^n-1}$.
Kamata I_i na kraju i-te godine otplate zajma: $I_i = C_{i-1} \cdot p$.
Iznos otplatne kvote R_i na kraju i-tog razdoblja: $R_i = a - I_i$.
Ostatak duga C_i na kraju i-tog razdoblja: $C_i = C_{i-1} - R_i$.
Otplatna tablica:

kraj razdoblja	anuitet	kamata	otplatna kvota	ostatak duga
i	a_i	I_i	R_i	C_i

Račun otpisa

A - iznos nabavne vrijednosti dobra, N - trajanje dobra u godinama, R_N - iznos ostatka vrijednosti nakon N godina, a_n - iznos otpisne kvote u n-toj godini otpisa, a_0 - iznos prve otpisne kvote.

Linearno otpisivanje

- otpisne kvote su stalne: $a = \frac{A-R_N}{N}$.
Tablica otpisa:

godina	poč. vrij. R_{n-1}	otpisna kvota a_n	ostatak vrij. R_n	% otpisa, p_n

Aritmetičko-degresivno otpisivanje

- godišnje otpisne kvote umanjuju se za stalan iznos

$$d = 2\frac{[Na_1 - (A - R_N)]}{N(N-1)}.$$

Geometrijsko-degresivno otpisivanje

- svake godine otpisuje se $p\%$ ostatka vrijednosti iz prethodne godine. Ostatak vrijednosti nakon n godina otpisivanja je

$$R_n = A\,(1-p)^n\,(a_1 - a_0).$$

Matrice

Zbrajaju se po točkama, skalarom se množi svaki broj u matrici, množe se ako su ulančane (množenje nije komutativno), operacija transponiranja zamjenjuje retke i stupce.
Regularna je matrica koja ima maksimalan rang, za takvu je $\det A \neq 0$.
Određivanje ranga matrice i rješavanje sustava linearnih jednadžbi vrši se elementarnim transformacijama (Gaussova metoda) - matrica se svede na gornje-trokutasti oblik.
Pri traženju inverza, elementarne transformacije se provode kako bi se na mjestu originalne matrice dobila jedinična matrica: $(A|I_n)$ prevede se u oblik $(I_n|A^{-1})$.

Inverz matrice reda 2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \; A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Determinanta u određivanju inverza matrice - Cramerovo pravilo

Inverz matrice je:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A_{ij})^T,$$

a A_{ij} je algebarski komplement elementa a_{ij}, po iznosu jednak

$$(-1)^{i+j} \cdot (\text{ determinanta matrice u kojoj je izostavljen } i\text{-ti redak i } j\text{-ti stupac})$$

Cramerovo pravilo u rješavanju sustava linearnih jednadžbi

D - determinanta matrice sustava, D_{x_i} determinanta u kojoj je i-ti stupac zamijenjen stupcem slobodnih koeficijenata. Za $i = 1, \ldots, n$ vrijedi:

$$x_i = \frac{D_{x_i}}{D}.$$

Jednadžba regresijskog pravca

Jednadžba regresijskog pravca je $\tilde{y} = b + ax$ za:

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum (x_i y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \qquad a = \frac{n \sum (x_i y_i) - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}.$$

Metoda ulaza-izlaza

Tabela ulaza-izlaza sastoji se od matrice (vektora) proizvodnje X (1. stupac), matrice ulaza-izlaza X_{ij} (središnji dio) i vektora finalne potražnje D (zadnji stupac):

X_i	X_{ij}			x_i
X_1	X_{11}	$\cdots$	X_{1n}	x_1
X_2	X_{21}	$\cdots$	X_{2n}	x_2
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
X_n	X_{n1}	$\cdots$	X_{nn}	x_n

Vrijedi: $X_i = \sum_j X_{ij} + x_i$.
Matrica tehničkih koeficijenata $A = (a_{ij})$ ima elemente $a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j}$. Vrijedi da je $D = X - AX$.
Matrica tehnologije je $T = I - A$.
Matricu proizvodnje dobivamo množenjem inverza matrice tehnologije s matricom finalne potražnje: $X = T^{-1} \cdot D$.

Elementarne funkcije

Linearna funkcija

Graf linearne funkcije $f(x) = ax + b$ je pravac. Koeficijent a označuje stalni nagib pravca, a b veličinu odsječka na osi y. Nultočku dobivamo rješavanjem jednadžbe $f(x) = 0$.

Kvadratna funkcija

Graf kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ je parabola.
Parabola je otvorena prema gore ako je $a > 0$, a prema dolje ako je $a < 0$. Nultočke parabole su zadane izrazom

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Broj nultočki ovisi o predznaku diskriminante $D = b^2 - 4ac$. Tjeme T parabole ima koordinate $T(-b/2a, -D/4a)$.

Osnovna svojstva eksponencijalnih i logaritamskih izraza i veza tih funkcija

$$\begin{array}{ll} a^x = a^y \Longrightarrow x = y & \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \\ a^x \cdot a^y = a^{x+y} & \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \\ \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} & \log_a x^n = n \log_a x \\ (a^x)^y = a^{xy} & \log_a a = 1; \log_a 1 = 0 \end{array}$$

Veza eksponencijalnih i logaritamskih funkcija

$$\log_a a^y = y, \quad a^{\log_a x} = x$$

Račun izjednačenja

Računom izjednačenja određuje se ravnotežna cijena x_0 koja je takva da je količina ponude jednaka količini potražnje: $d(x_0) = t(x_0)$.
Računom izjednačenja određuje se i ravnotežna količina proizvodnje x_0 koja je takva da je funkcija prihoda jednaka funkciji troška $P(x_0) = T(x_0)$.

Domena funkcije

1. Racionalne funkcije nisu definirane u točkama za koje nazivnik ima vrijednost 0.
2. Parni korijeni mogu se vaditi samo iz nenegativnih brojeva.
3. Logaritme možemo vaditi samo iz pozitivnih brojeva.

Parne i neparne funkcije

Ako je $f(-x) = f(x)$, funkcija f je parna funkcija, a ako je $f(-x) = -f(x)$, funkcija f je neparna funkcija.

Kompozicije funkcija

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)], \ (f \circ g)(x) = f[g(x)].$$

Inverzna funkcija

Za zadanu funkciju f inverzna funkcija se dobiva rješavanjem jednadžbe $f(y) = x$ po y.

Derivacije elementarnih funkcija

f	f'
c	0
x^m	mx^{m-1}
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

Derivacije složenih funkcija

f	f'
g^m	$mg^{m-1}g'$
e^g	$e^g g'$
a^g	$a^g \ln a \cdot g'$
$\ln g$	$\frac{1}{g}g'$
$\log_a g$	$\frac{1}{g \ln a}g'$
$\sqrt{g}$	$\frac{1}{2\sqrt{g}}g'$

Pravila deriviranja

$$\begin{aligned}
(cf)' &= cf' \\
(f \pm g)' &= f' \pm g' \\
(f \cdot g)' &= f'g + fg' \\
\left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2}
\end{aligned}$$

Značenje vrijednosti derivacije

$f'(x_0)$ daje nagib tangente na graf funkcije f u zadanoj točki $(x_0, f(x_0))$, jednadžba tangente je $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Određivanje intervala rasta i pada te lokalnih ekstrema funkcije

Interval rasta funkcije f određuje se rješavanjem nejednadžbe $f'(x) \geq 0$.
Interval pada funkcije f određuje se rješavanjem nejednadžbe $f'(x) \leq 0$.
Stacionarne točke funkcije f dobivaju se rješavanjem jednadžbe $f'(x) = 0$. Ako je $f''(x_0) > 0$, u stacionarnoj točki x_0 funkcija ima lokalni minimum. Ako je $f''(x_0) < 0$, f u x_0 ima lokalni maksimum.
Ako je drugu derivaciju funkcije teško odrediti, prirodu ekstrema utvrđujemo praćenjem rasta i pada funkcije u okolini stacionarne točke.

Elastičnost funkcije

Koeficijent elastičnosti funkcije f za vrijednost x definira se kao: $E(x) = \frac{x}{f(x)} f'(x)$.

Ekstrem funkcije zadane na segmentu

Funkcija na segmentu $[a,b]$ ima i minimalnu i maksimalnu vrijednost; one se postižu ili u stacionarnim točkama unutar segmenta ili u rubnim točkama segmenta.

Osnovni princip granične analize

Funkcija dobiti $D(x) = P(x) - T(x)$ postiže maksimum za onu količinu proizvodnje x_0 za koju vrijedi: 1) $P'(x_0) = T'(x_0)$ i 2) $T''(x_0) > P''(x_0)$.

Određivanje ekstrema funkcije dviju varijabli

Funkciji treba odrediti sve parcijalne derivacije prvog i drugog reda. Potom treba:

1. odrediti stacionarne točke funkcije $f(x,y)$ rješavanjem sustava:
$$f'_x(x,y) = 0, f'_y(x,y) = 0$$
2. ispitati prirodu ekstrema u svakoj stacionarnoj točki (x_0,y_0) računanjem izraza
$$D(x_0,y_0) = f''_{xx}(x_0,y_0) f''_{yy}(x_0,y_0) - \left[f''_{xy}(x_0,y_0)\right]^2.$$
Ako je $D < 0$, u (x_0,y_0) funkcija ima sedlo.
Ako je $D > 0$, tada je (x_0,y_0) ekstrem i to: lokalni minimum ako je $f''_{xx}(x_0,y_0) > 0$, a lokalni maksimum ako je $f''_{xx}(x_0,y_0) < 0$.

Integralni račun

Tablica osnovnih integrala

f	k	$x^m,\ n \neq -1$	e^x	a^x	$\frac{1}{x}$
$\int f(x)dx$	$kx + c$	$\frac{x^{n+1}}{(n+1)} + c$	$e^x + c$	$\frac{a^x}{\ln a} + c$	$\ln\lvert x\rvert + c$

Pravila integriranja

$$kf(x)dx = k\int f(x)dx, \qquad \int \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Parcijalno integriranje

Kad određujemo integral produkta funkcija i kad je jedan od faktora (v) moguće lako integrirati, dok se drugi (u) deriviranjem pojednostavnjuje, integral određujemo parcijalnom integracijom:

$$\int udv = uv - vdu.$$

Određeni integral, površina pod krivuljom pozitivne funkcije

Površina koju s x-osi na segmentu $[a,b]$ zatvara graf funkcije $f(x)$ računa se po Newton-Leibnizovoj formuli:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Određivanje površine između dvije krivulje

Ako vrijedi $f(x) \geq g(x)$ za svaki $x \in [a,b]$, tada je površina P koju na segmentu $[a,b]$ zatvaraju krivulje $y = f(x)$ i $y = g(x)$ jednaka

$$P = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

Primjena integralnog računa u graničnoj analizi

Ako je poznata granična vrijednost $f'(x)$ neke funkcije s ekonomskim značenjem $f(x)$ (npr. troška, dobiti ili prihoda) onda promjenu vrijednosti $f(b) - f(a)$ računamo kao

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Literatura

[1] L.D. Hoffmann, G.L. Bradley: Calculus for Bussines, Economics, and the Social and Life Sciences, McGraw-Hill, N.Y., 2000.

[2] L.D. Hoffmann, G.L. Bradley: Finite Mathematics with Calculus, Mc-Graw-Hill, N.Y., 1995.

[3] D. Hughes-Hallet, A.M. Gleason, et al.: Calculus, J. Wiley, N.Y., 1999.

[4] P. Javor: Uvod u matematičku analizu, Školska knjiga, Zagreb, 1988.

[5] B. Kolarec: Uvod u poslovnu matematiku, skripta, Agronomski fakultet, Zagreb, 2010.

[6] K. Sydsaeter, P. J. Hammond: Mathematics for Economic Analysis, Prentice Hall, 2006.

Kazalo

A

analiza ulaza-izlaza 65
- matrica finalne potražnje 66
- matrica proizvodnje 66
- matrica tehničkih koeficijenata 66
- matrica ulaza-izlaza 66

antiderivacija 130
anuitet 24
- složena kamata 24
- otplatna kvota 24

asimptota 92, 95
- horizontalna 92
- kosa 93
- vertikalna 92

C

Cobb-Douglasova funkcija 120, 124
- marginalna produktivnost kapitala . . 124
- marginalna produktivnost rada 124

D

derivacija 98
determinanta matrice 55
- Cramerovo pravilo 57
- svojstva determinante 57

druga derivacija 103

E

ekstrapolacija 62, 85
ekstrem funkcije
- kritične (stacionarne) točke 107
- lokalni maksimum 107
- lokalni minimum 107

elastičnost funkcije 114
Excel 63, 84

F

funkcija 75
- cijene i koristi 79
- domena 75
- eksponencijalna 80
- graf 75, 90
- gustoće vjer. raspodjele 141
- inverzna 95
- izmjene proizvoda 80
- kompozicija 95
- kvadratna 79
- linearna 76
- logaritamska 82
- neparna 91
- normalna raspodjela 141

parna . . . 91
polinom . . . 76
potencije . . . 78
racionalna . . . 79
slika . . . 75, 90

G

graf funkcije . . . 75
dviju varijabli . . . 121
jedne varijable . . . 75
tangenta . . . 108

I

integral
površina između grafova . . . 142
prosjek funkcije . . . 143
akumulirana dobit . . . 144
korisni vijek proizvoda . . . 144
metoda parcijalne integracije . . . 134
metoda supstitucije . . . 133
određivanje vjerojatnosti . . . 141
površina pod grafom . . . 139
integralne sume . . . 138
interpolacija . . . 62, 85

K

kamatni račun . . . 15
dekurzivni kamatni faktor . . . 16
glavnica . . . 16
kamatna stopa . . . 15
relativna, 17
nominalna, 17
postnumerando . . . 19
prenumerando . . . 19
koeficijent određenosti . . . 64
kvadratni model . . . 85

L

limes . . . 91
linearna funkcija . . . 64
linearni model . . . 85
stohastički . . . 63
linearni trend . . . 59
logaritamska funkcija . . . 85

M

matrica . . . 34
antisimetrična . . . 35
determinanta matrice . . . 55
dijagonalna . . . 34
donje trokutasta . . . 35
Gaussov algoritam . . . 40
glavna dijagonala . . . 34
gornje trokutasta . . . 34
jedinična . . . 34
kvadratna . . . 34
matrica dizajna . . . 60
množenje matrica . . . 37
nul-matrica . . . 34
rang matrice . . . 39
regularna . . . 47
simetrična . . . 35
singularna . . . 47
sporedna dijagonala . . . 34
suprotna . . . 36
transponiranje . . . 35
modelna funkcija . . . 84

N

neprekidna funkcija . . . 92
niz . . . 12
aritmetički . . . 12
geometrijski . . . 14
stacionarni . . . 12

O

određeni integral . . . 139
Newton-Leibnitzova formula . . . 139
otpis . . . 27
aritmetičko-degresivni . . . 28
geometrijsko-degresivni . . . 29
linearni . . . 27

P

parabola . . . 79
parcijalne derivacije . . . 122
parcijalne derivacije drugog reda . . . 123
Photomath . . . 71
pravac regresije . . . 63
primitivna funkcija . . . 130

R

radioaktivni raspad . . . 82
regresija

ekstrapolacija 64
regresijski pravac 59
dijagram raspršenja 59
matrica dizajna 60
modelna funkcija 60
renta 26

S

Sarrusovo pravilo 56
sedlo 125
skup 9
beskonačan 9
cijelih brojeva 10
element 9
granica 11
infimum 11
kardinalni broj 9
kompleksnih brojeva 11
konačan skup 9
ograničen odozgo 11
podskup 9
prazan 9
presjek skupova 10
prirodnih brojeva 10
racionalnih brojeva 10
razlika skupova 10
realnih brojeva 11
supremum 11
unija skupova 10
stacionarna (kritična) točka 106
subdivizija segmenta 138
sustav linearnih jednadžbi 44

T

tangencijalna ravnina 123
transponiranje matrice 35

V

vektor 32
linearno nezavisni vektori 33
norma vektora 32
nul-vektor 33

Z

zajam 24
otplatna tablica 25
zakon ponude i potražnje 77